

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ  
EXERCICE 2



FRANCE MÉTROPOLITAINE  
2025

$$f(x) = x(2(\ln x)^2 - 3\ln(x) + 2)$$

## CORRECTION

### PARTIE A

1. Déterminons le nombre dérivé  $f'(1)$ :

Ici: •  $A(1;2)$  et  $C(3;0)$

•  $T_A$  passe par les points A et C

•  $\mathcal{D}_f = ]0; +\infty[$ .

Dans ces conditions, nous avons:  $f'(1) = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$

$$= \frac{0 - 2}{3 - 1}$$

$$= -1.$$

Ainsi:  $f'(1) = -1$ .

2. Déterminons le nombre de solutions de  $f'(x) = 0$  sur  $]0; 3]$ :

D'après le graphique, la fonction  $f$  admet **deux extrema** sur  $]0; 3]$ .

D'où la fonction  $f'$  s'annule deux fois sur  $]0; 3]$ .

Par conséquent, l'équation  $f'(x) = 0$  admet sur  $]0; 3]$ : **2 solutions**.

3. Déterminons le signe de  $f''(0, 2)$ :

Sur l'intervalle  $]0; 0, 5]$ , le graphe de la fonction  $f$  est **concave**.

Par conséquent, nous pouvons affirmer que:  $f''(0, 2) < 0$ .

## PARTIE B

**PRÉALABLE:**

- $f(x) = x \times (2 (\ln x)^2 - 3 \ln(x) + 2)$
- $\mathcal{D}f = ]0; +\infty[$ .

1. a. Résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $2X^2 - 3X + 2 = 0$ :

Soit l'équation:  $2X^2 - 3X + 2 = 0$ .

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 2 = -7 < 0.$$

Comme  $\Delta < 0$ , l'équation n'admet aucune solution dans  $\mathbb{R}$ .

1. b. Déduisons-en que  $C_f$  ne coupe pas l'axe des abscisses:

$C_f$  coupe l'axe des abscisses ssi:  $f(x) = 0$ .

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x \times (2 (\ln x)^2 - 3 \ln(x) + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 (\ln x)^2 - 3 \ln(x) + 2 = 0 \quad \text{car } x > 0.$$

(1)

Posons:  $X = \ln(x)$ .

D'où, nous pouvons écrire: (1)  $\Leftrightarrow 2X^2 - 3X + 2 = 0$ .

(2)

Comme l'équation (2) n'admet aucune solution dans  $\mathbb{R}$ :  $C_f$  ne peut pas couper l'axe des abscisses.

2. Déterminons la limite de  $f$  en  $+\infty$ :

Nous avons:  $f(x) = x (2 (\ln x)^2 - 3 \ln(x) + 2)$

$$= x \times (\ln x)^2 \times \left[ 2 - \frac{3}{\ln(x)} + \frac{2}{(\ln x)^2} \right].$$

Dans ces conditions:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times (\ln x)^2 \times \left[ 2 - \frac{3}{\ln(x)} + \frac{2}{(\ln x)^2} \right].$$

$$\text{Or: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\ln x)^2} = 0.$$

$$\begin{aligned}
 \text{D'où: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times (\ln x)^2 \times [2 - 0 + 0] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x (\ln x)^2 \\
 &= +\infty.
 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. a. Montrons que pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ ,  $f''(x) = \frac{1}{x} (4 \ln(x) + 1)$ :

$f$  est deux fois dérivable sur  $]0; +\infty[$ .

Dans ces conditions, pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ , nous pouvons calculer  $f'$  et  $f''$ :

$$\bullet f'(x) = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$$

$$\begin{aligned}
 \bullet f''(x) &= 2 \times 2 \times (\ln x) \times \left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} - 0 \\
 &= \frac{1}{x} x [4 \ln(x) + 1].
 \end{aligned}$$

Nous avons donc bien pour tout  $x \in \mathcal{D}_f$ :  $f''(x) = \frac{1}{x} x [4 \ln(x) + 1]$ .

3. b. b, Étudions la convexité de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ :

D'après le cours:  $\bullet f$  est concave sur  $I$  ssi  $f''(x) \leq 0$  pour tout  $x \in I$

$\bullet f$  est convexe sur  $I$  ssi  $f''(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ .

Pour répondre à la question, nous allons étudier le signe de  $f''$  sur  $]0; +\infty[$ .

Comme  $x \in ]0; +\infty[$ :  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4 \ln(x) + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{1}{4}$$

$$\text{cad } x = e^{-1/4}.$$

Ainsi: •  $f''(x) \geq 0$  sur  $[e^{-1/4}; +\infty[$  et donc  $f$  est convexe sur  $[e^{-1/4}; +\infty[$

•  $f''(x) \leq 0$  sur  $]0; e^{-1/4}]$  et donc  $f$  est concave sur  $]0; e^{-1/4}]$ .

3. b.  $b_2$ . Précisons la valeur exacte du point d'inflexion:

D'après le cours, si  $f''$  s'annule et change de signe en  $a$  alors  $C_f$  admet un point d'inflexion au point d'abscisse:  $x = a$ .

Ici,  $f''$  s'annule et change de signe en:  $x = e^{-1/4}$ .

Ainsi, la valeur exacte du point d'inflexion est:  $x = e^{-1/4}$ .

Il s'agit en fait du point  $D(e^{-1/4}; f(e^{-1/4}))$ .

3. c. Montrons que  $C_f$  est au-dessus de  $T_B$  sur  $[1; +\infty[$ :

La fonction  $f$  est convexe sur  $[e^{-1/4}; +\infty[$ , elle est donc convexe sur  $[1; +\infty[$ .

$C_f$  est donc au-dessus de toutes ses tangentes et, en particulier, au-dessus de  $T_B$ .

## PARTIE C

1. Justifions que la tangente  $T_B$  a pour équation  $y = 2x - e$ :

Il s'agit ici de déterminer l'équation réduite de la tangente  $T_B$  à la courbe  $C_f$  au point  $B(e; e)$ .

L'équation réduite de  $T_B$  s'écrit:  $y = f'(x_B) \times (x - x_B) + f(x_B)$

$$\Leftrightarrow y = 2x(x - e) + e$$

$$\text{cad } y = 2x - e.$$

$T_B$  a donc bien pour équation réduite:  $y = 2x - e$ .

2. Calculons  $I = \int_1^e x \ln(x) dx$  à l'aide d'une IPP:

Ici, à l'aide d'une IPP, nous devons calculer:  $I = \int_1^e x \ln(x) dx$ .

Posons: •  $U(x) = \ln(x)$ , d'où  $U'(x) = \frac{1}{x}$

•  $V'(x) = x$ , d'où  $V(x) = \frac{x^2}{2}$ .

Dans ces conditions:  $I = \left[ \frac{x^2}{2} \times \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \left( \frac{1}{x} \right) \times \left( \frac{x^2}{2} \right) dx$

$$= \left( \frac{e^2}{2} x \ln(e) - 0 \right) - \int_1^e \left( \frac{x}{2} \right) dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^e$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} x \left( \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

Nous avons donc bien:  $I = \frac{e^2 + 1}{4}$ .

3. Déduisons-en la valeur exacte de  $\mathcal{A}$  en unité d'aire:

$\mathcal{A}$  est l'aire délimitée par la courbe  $C_f$ , la tangente  $T_B$ , et les droites d'équation  $x=1$  et  $x=e$ .

On admet que:  $\int_1^e x \ln(x)^2 = \frac{e^2 - 1}{4}$ .

Dans ces conditions:  $\mathcal{A} = \int_1^e f(x) dx - \int_1^e (2x - e) dx$ .

D'où:  $\mathcal{A} = \int_1^e (x \times [2x(\ln x)^2 - 3\ln(x) + 2] - 2x + e) dx$

$$= \int_1^e (2x(\ln(x))^2 - 3x\ln(x) + e) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^e 2x (\ln x)^2 dx + \int_1^e -3x \ln(x) dx + \int_1^e e dx \\
&= 2 \times \int_1^e x (\ln x)^2 dx - 3 \times \int_1^e x \ln(x) dx + e \times \left[ x \right]_1^e \\
&= 2 \times \left( \frac{e^2 - 1}{4} \right) - 3 \times \left( \frac{e^2 + 1}{4} \right) + e \times (e - 1) \\
&= \frac{3e^2 - 4e - 5}{4} \text{ ua.}
\end{aligned}$$

En unité d'aire, la valeur exacte de  $\mathcal{A}$  est:  $\frac{3e^2 - 4e - 5}{4}$ .