BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

ASIE
2025

JOUETS & TESTS

CORRECTION

PARTIE A

1. Donnons les probabilités $P(F)$ et $P_F(S)$:

- " 95% des jouets réussissent le test de fabrication ": $P(F) = 95\%$.

- " parmi les jouets qui réussissent le test de fabrication, 98% réussissent le test de sécurité ": $P_F(S) = 98\%$.

Ainsi, nous avons: $P(F) = 95\%$ et $P_F(S) = 98\%$.

2. a. Construisons un arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

- F = " réussit le test de fabrication "

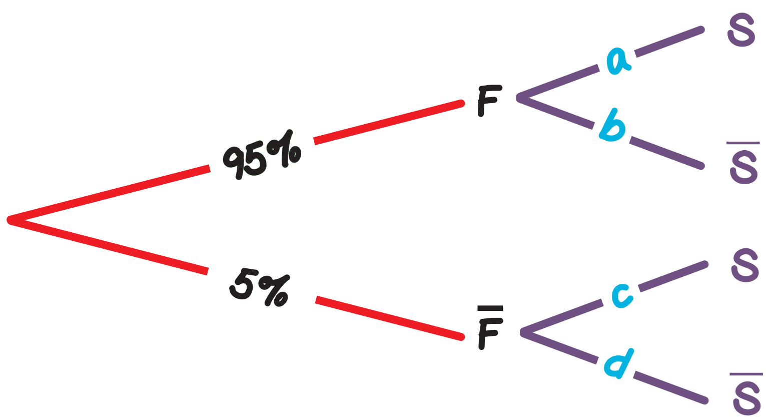
- S = " réussit le test de sécurité ".

- $\overline{F}$ = " ne réussit pas le test de fabrication "

- $\overline{S}$ = " ne réussit pas le test de sécurité ".

- $P(F) = 95\%$
- $P(\overline{F}) = 1 - 95\% = 5\%$.
- $P_F(S) = 98\%$
- $P_F(\overline{S}) = 1 - 98\% = 2\%$.
- $P_{\overline{F}}(S) =$?
- $P_{\overline{F}}(\overline{S}) =$?
- $P(\overline{F} \cap \overline{S}) = 1\%$.

D'où l'arbre pondéré suivant :



, avec :

- $a = 98\%$
- $b = 2\%$
- $c =$?
- $d =$?

2. b. Montrons que $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = 0,2$:

Ici, nous devons calculer : $P_{\overline{F}}(\overline{S})$.

$$P_{\overline{F}}(\overline{S}) = \frac{P(\overline{F} \cap \overline{S})}{P(\overline{F})}$$

$= \dfrac{1\%}{5\%}$

$= 20\%$.

Ainsi, nous avons bien: $P_{\overline{F}}(\overline{S}) = 0,2$.

D'où: $c = 0,8$ et $d = 0,2$.

3. **Calculons la probabilité que le jouet réussisse les deux tests:**

Calculer la probabilité que le jouet réussisse les deux tests revient à déterminer: $\mathbf{P(F \cap S)}$.

$\mathbf{P(F \cap S)} = P_F(S) \times P(F)$

$= 98\% \times 95\%$

$= 93,1\%$.

Ainsi, la probabilité que le jouet réussisse les deux testes est de: $93,1\%$.

4. **Montrons que $P(S) = 0,97$:**

L'événement $S = (S \cap F) \cup (S \cap \overline{F})$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$\mathbf{P(S)} = P(S \cap F) + P(S \cap \overline{F})$

$= P_F(S) \times P(F) + P_{\overline{F}}(S) \times P(\overline{F})$

$= 98\% \times 95\% + 0,8 \times 5\%$

$= 97,1\%.$

Ainsi, nous avons bien: $P(S) \approx 97\%$, arrondi au centième.

5. Calculons $P_S(F)$:

En effet, la probabilité que le jouet réussisse le test de fabrication, sachant qu'il a réussi celui de sécurité revient à déterminer: $P_S(F)$.

$$P_S(F) = \frac{P(S \cap F)}{P(S)}$$

$$= \frac{P(F \cap S)}{P(S)}$$

$$= \frac{93,1\%}{97,1\%}$$

$$= 95,88\%.$$

Ainsi, arrondi au centième: $P_S(F) \approx 96\%$.

PARTIE B

1. a. Exprimons $E(S_n)$ en fonction de " n ":

Ici, S_n suit une loi binomiale de paramètres: n et $p = 0,95$.

D'après le cours: $E(X) = n \cdot p$.

D'où ici: $E(S_n) = 0,95 \times n$ jouets.

1. b. Exprimons $V(S_n)$ en fonction de " n ":

Ici, S_n suit une loi binomiale de paramètres: n et $p = 0,95$.

D'après le cours: $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$.

D'où ici: $V(S_n) = n \times 0,95 \times 0,05$

$= 0,0475 \times n$ (jouets)^2.

2. a. Calculons $P(S_{150} = 145)$ et interprétons:

Ici, il s'agit de calculer: $P(S_{150} = 145)$, avec $S_n \rightsquigarrow B(150 ; 0,95)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

D'où ici: $P(S_{150} = 145) = \binom{150}{145} (0,95)^{145} \cdot (1 - 0,95)^{(150 - 145)}$

$$= \binom{150}{145} (0,95)^{145} \cdot (0,05)^5$$

$$= \frac{150\,!}{145\,!\,5\,!}\,(0,95)^{145}\,.\,(0,05)^{5}$$

$$= \frac{150 \times 149 \times 148 \times 147 \times 146}{5 \times 4 \times 3 \times 2}\,(0,95)^{145}\,.\,(0,05)^{5}$$

$$\approx 10,9\%, \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Ainsi: $P(S_{150} = 145) \approx 10,9\%$ ce qui signifie que la probabilité que 145 jouets sur 150 du lot réussissent le test de fabrication est d'environ 10, 9%.

2. b. Déterminons $P(S_n \geq 141)$:

En effet, déterminer la probabilité qu'au moins 94% des jouets réussissent le test de fabrication revient à calculer:

$$P(S_n \geq 141) \quad \text{car} \quad 94\% \times 150 = 141.$$

$P(S_n \geq 141) = 1 - P(S_n \leq 140)$

$\approx 78,1\%$, arrondi à 10^{-3} près (calculatrice).

Ainsi: $P(S_n \geq 141) \approx 78,1\%$.

3. a. a_1. Montrons que $E(F_n) = 0,95$:

Nous avons: • $F_n = \dfrac{S_n}{n}$

• $E(S_n) = 0,95 \times n$.

Rappelons que d'après le cours: • $E(a.X) = a.E(X)$

• $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$.

Dans ces conditions: $E(F_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n} \times E(S_n)$$

$$= \frac{1}{n} \times 0,95 \times n$$

$$= 0,95.$$

Ainsi, nous avons bien: $E(F_n) = 0,95$.

3. a. a_2. **Montrons que $V(F_n) = \frac{0,0475}{n}$:**

Nous avons: • $F_n = \frac{S_n}{n}$

• $V(S_n) = 0,0475 \times n$.

Rappelons que si les X_i sont indépendantes, d'après le cours:

• $V(a.X) = a^2.V(X)$

• $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$.

D'où: $V(F_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right)$

$$= \frac{1}{n^2} \times V(S_n)$$

$$= \frac{1}{n^2} \times 0,0475 \times n$$

$$= \frac{0,0475}{n}.$$

Ainsi, nous avons bien: $V(F_n) = \dfrac{0,0475}{n}$.

3. b. Déterminons une valeur " n " de la taille du lot telle que...:

Pour répondre à cette question, nous allons d'abord calculer:

$$P(0,93 < F_n < 0,97).$$

$$P(0,93 < F_n < 0,97) = P(0,93 - E(F_n) < F_n - E(F_n) < 0,97 - E(F_n))$$

$$= P(-0,02 < F_n - E(F_n) < 0,02)$$

$$= P(|F_n - E(F_n)| < 0,02)$$

$$= 1 - P(|F_n - E(F_n)| \geqslant 0,02).$$

Dans ces conditions: $P(0,93 < F_n < 0,97) \geqslant 0,96$

$$\Longleftrightarrow P(|F_n - E(F_n)| \geqslant 0,02) \leqslant 0,04.$$

D'après **l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev**, nous avons:

$$P(|F_n - E(F_n)| \geqslant 0,02) \leqslant \frac{V(F_n)}{0,02^2}$$

cad $P(|F_n - E(F_n)| \geqslant 0,02) \leqslant \dfrac{0,0475}{(0,02)^2 \times n}$.

On cherche donc n tel que: $\dfrac{0,0475}{(0,02)^2 \times n} \leqslant 0,04$.

Or: $\dfrac{0,0475}{(0,02)^2 \times n} \leqslant 0,04 \iff n \geqslant 2968,75$.

La plus petite valeur de n recherchée est donc: $n = 2969$.