www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 1

ANTILLES-GUYANE
2025

GROUPES SANGUINS

CORRECTION

1. Recopions et complétons l'arbre pondéré:

D'après l'énoncé, nous avons:

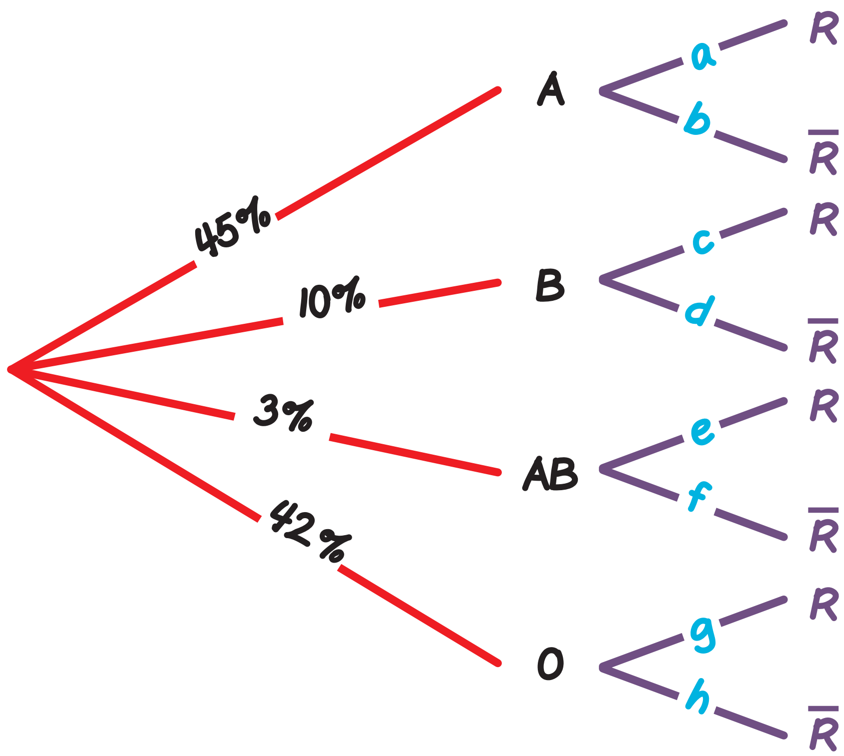
- A = " la personne est de groupe A "
- B = " la personne est de groupe B "
- AB = " la personne est de groupe AB "
- O = " la personne est de groupe O ".

- R = " la personne a un facteur rhésus positif "
- $\overline{R}$ = " la personne a un facteur rhésus négatif ".

- $P(A) = 45\%$
- $P(B) = 10\%$
- $P(AB) = 3\%$
- $P(O) = 1 - 45\% - 10\% - 3\% = 42\%$.

- $P_A(R) = 85\%$
- $P_A(\overline{R}) = 1 - 85\% = 15\%.$
- $P_B(R) = 84\%$
- $P_B(\overline{R}) = 1 - 84\% = 16\%.$
- $P_{AB}(R) = 82\%$
- $P_{AB}(\overline{R}) = 1 - 82\% = 18\%.$

D'où l'arbre de probabilités complété est le suivant:



, avec:

- $a = 85\%$
- $b = 15\%$
- $c = 84\%$
- $d = 16\%$
- $e = 82\%$
- $f = 18\%$

2. a. Montrons que $P(B \cap R) = 0,084$:

Ici, nous devons calculer: $P(B \cap R)$.

$P(B \cap R) = P_B(R) \times P(B)$

$= 84\% \times 10\%$

$= 8,4\%.$

Ainsi nous avons bien: $P(B \cap R) = 0,084.$

2. b. Interprétons ce résultat:

$P(B \cap R) = 0,084$ signifie que la probabilité que la personne choisie soit de groupe B et soit positive au rhésus est de: 8,4%.

3. Montrons que $P_O(R) = 0,83$:

Ici, nous devons calculer: $P_O(R)$ sachant que $P(R) = 0,8397$.

$$P_O(R) = \frac{P(O \cap R)}{P(O)}.$$

Or, nous savons que: $P(O) = 42\%$.

Reste à calculer: $P(O \cap R)$.

L'événement $R = (O \cap R) \cup (A \cap R) \cup (B \cap R) \cup (AB \cap R)$.

D'après la formule des **probabilités totales**:

$P(R) = P(O \cap R) + P(A \cap R) + P(B \cap R) + P(AB \cap R)$

$= x + P_A(R) \times P(A) + P_B(R) \times P(B) + P_{AB}(R) \times P(AB)$

$= x + 0,4911.$

D'où: $x = P(R) - 0,4911$

$= 0,8397 - 0,4911$

$= 0,3486.$

Dans ces conditions: $P_O(R) = \dfrac{P(O \cap R)}{P(O)}$

$= \dfrac{0,3486}{42\%}$

$= 0,83.$

Ainsi, nous avons bien: $P_O(R) = 0,83.$

4. **Montrons que $P(O \cap \overline{R}) = 0,0714$:**

Déterminer la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population soit donneur universel revient à calculer: $P(O \cap \overline{R})$.

Or: $P(O \cap \overline{R}) = P_O(\overline{R}) \times P(O)$

$= [1 - P_O(R)] \times P(O)$

$= [1 - 0,83] \times 42\%$

$= 0,0714.$

Ainsi, nous avons bien: $P(O \cap \overline{R}) = 0,0714.$

5. a. **Justifions que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres:**

Soit l'expérience aléatoire consistant à **choisir un échantillon de 100 personnes dans la population française**: cette population est suffisamment grande pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

X est la variable aléatoire égale au nombre de donneurs universels dans cet échantillon.

Nous savons que: **la probabilité qu'un individu choisi au hasard dans la population soit donneur universel** $= 0,0714 = P(O \cap \overline{R}) = P(U)$.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli.

Nous sommes en présence de 100 épreuves aléatoires identiques et indépendantes, avec à chaque fois 2 issues possibles: U et $\overline{U}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de U suit donc **une loi binomiale** de paramètres: $n = 100$ et $p = 0,0714$.

Et nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(100\,;\,0,0714)$.

5. b. Déterminons la probabilité qu'il y ait au plus 7 donneurs universels:

Ici, il s'agit de calculer: $P(X \leqslant 7)$, avec $X \rightsquigarrow B(100\,;\,0,0714)$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves indépendantes (ou avec remise) est:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^{k} \cdot (1 - p)^{(n-k)}, \text{ avec: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Ici: $P(X \leqslant 7) \approx 0,57714$ (**calculatrice**).

Ainsi, à 10^{-3} près, la proba qu'il y ait au plus 7 donneurs universels est d'environ: 57, 7%.

5. c. c_1. Calculons E (X):

D'après le cours: $E(X) = n \cdot p$.

Ici nous avons donc: $E(X) = 100 \times 0,0714$

$= 7,14$ personnes.

5. c. c_2. Calculons V (X):

D'après le cours: $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$.

Ici nous avons donc: $V(X) = 100 \times 0,0714 \times (1 - 0,0714)$

$= 6,63$ (personnes)^2.

6. a. Que représente M_n dans le contexte de l'exercice ?

Ici: $M_N = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N}{N}$.

M_N modélise donc: le nombre moyen de donneurs universels sur les N collectes de sang organisées.

6. b. Calculons E (M_N):

Rappelons que d'après le cours:
- $E(a \cdot X) = a \cdot E(X)$
- $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$.

Ici: $M_N = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N}{N}$.

Dans ces conditions: $E(M_N) = E\left(\dfrac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N}{N}\right)$

$$= \frac{1}{N} \times E(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N)$$

$$= \frac{1}{N} \times [E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \ldots + E(X_N)]$$

$$= \frac{1}{N} \times N \times E(X)$$

$$= E(X)$$

$$= 7,14 \text{ personnes.}$$

Ainsi: $E(M_N) = 7,14$ personnes.

6. c. Calculons $V(M_N)$:

Rappelons que si les X_i sont indépendantes, d'après le cours:

- $V(a \cdot X) = a^2 \cdot V(X)$
- $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$.

Or ici les X_i sont indépendantes, d'où:

$$V(M_N) = V\left(\frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{N^2} V (X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_N)$$

$$= \frac{1}{N^2} \times [V (X_1) + V (X_2) + V (X_3) + \ldots + V (X_N)]$$

$$= \frac{1}{N^2} \times N \times V (X)$$

$$= \frac{V (X)}{N}$$

$$= \frac{6,63}{N} \text{ (personnes)}^2.$$

Ainsi: $V (M_N) = \dfrac{6,63}{N}$ (personnes)^2.

6. d. Déterminons la + petite valeur de N telle que $P (7 < M_N < 7,28) \geqslant 0,95$:

Pour répondre à cette question, nous allons d'abord calculer:

$$P (7 < M_N < 7,28).$$

$$P (7 < M_N < 7,28) = P (7 - E (M_N) < M_N - E (M_N) < 7,28 - E (M_N))$$

$$= P (7 - 7,14 < M_N - E (M_N) < 7,28 - 7,14)$$

$$= (- 0,14 < M_N - E (M_N) < 0,14)$$

$$= P (| M_N - E (M_N) | < 0,14)$$

$$= 1 - P (| M_N - E (M_N) | \geqslant 0,14).$$

Dans ces conditions: $P(7 < M_N < 7,28) \geqslant 0,95$

$$\Longleftrightarrow P(|M_N - E(M_N)| \geqslant 0,14) \leqslant 0,05.$$

D'après **l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev**, nous avons:

$$P(|M_N - E(M_N)| \geqslant 0,14) \leqslant \frac{V(M_N)}{0,14^2}$$

cad $P(|M_N - E(M_N)| \geqslant 0,14) \leqslant \dfrac{6,63}{N \times 0,14^2}.$

On cherche donc N tel que: $\dfrac{6,63}{N \times 0,14^2} \leqslant 0,05.$

Or: $\dfrac{6,63}{N \times 0,14^2} \leqslant 0,05 \Longleftrightarrow N \geqslant 6766.$

La plus petite valeur de N recherchée est donc: $N = 6766.$