www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 1

FRANCE MÉTROPOLITAINE
2024

Questionnaire à Choix Multiple

RÉPONSES V V F V

1. L'axe des abscisses est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$...

Ici: • $f(x) = 5xe^{-x}$

• $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Pour répondre à cette question nous allons calculer: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 5xe^{-x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{5x}{e^x}$$

$= 0$, d'après le Théorème des Croissances Comparées.

Or, d'après le cours: " si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = \ell$ ".

Donc ici, la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation: $y = 0$.

L'axe des abscisses est donc bien une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$.

Freemaths : Tous droits réservés

2. La fonction f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E)...

Ici: • $f(x) = 5xe^{-x}$ (U x V)

• $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in \mathbb{R}$ nous pouvons calculer f'.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (5) \times (e^{-x}) + (5x) \times (-e^{-x})$

(U' x V + U x V')

$= 5e^{-x} - 5xe^{-x}$

$= e^{-x}(5 - 5x)$.

f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle **(E)** ssi: $f'(x) + f(x) = 5e^{-x}$.

Or: $f'(x) + f(x) = (5e^{-x} - 5xe^{-x}) + 5xe^{-x}$

$= 5e^{-x}$.

La fonction f est donc bien solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).

3. La suite (V_n) converge vers un nombre réel $\ell \in [-1 ; 1]$...

Ici: $U_n \leqslant V_n \leqslant W_n$, pour tout entier naturel n.

De plus, la suite (U_n) converge **vers " -1 "** et la suite (W_n) converge **vers " 1 "**.

La suite (V_n) est minorée et majorée mais on ne sait rien sur sa monotonie et sa convergence !

Freemaths : Tous droits réservés

Donc la réponse est: **FAUX**.

Un contre exemple ?

Pour tout entier n, prenons: $U_n = -1 - \frac{1}{3^n}$, $V_n = (-1)^n$, $W_n = 1 + \frac{1}{7^n}$.

Nous avons: • $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} -1 - \frac{1}{3^n} = -1$

• $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{7^n} = 1$.

Et pourtant, nous ne pouvons rien dire sur la limite de la suite alternée (V_n).

4. Pour tout entier naturel n, $U_0 \leqslant V_n \leqslant W_0$ ...

Ici: $U_n \leqslant V_n \leqslant W_n$, pour tout entier naturel n.

Sachant que (U_n) est croissante et (W_n) est décroissante, nous pouvons écrire:

$$U_0 \leqslant U_1 \leqslant U_2 \leqslant U_3 \leqslant \ldots \leqslant U_n \leqslant V_n \leqslant W_n \leqslant W_{n-1} \leqslant W_{n-2} \leqslant \ldots \leqslant W_1 \leqslant W_0$$

ou encore $U_0 \leqslant V_n \leqslant W_0$.

Ainsi pour tout entier naturel n, nous avons bien: $U_0 \leqslant V_n \leqslant W_0$.

Freemaths : Tous droits réservés