

www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ
EXERCICE 3



ANTILLES-GUYANE
2024

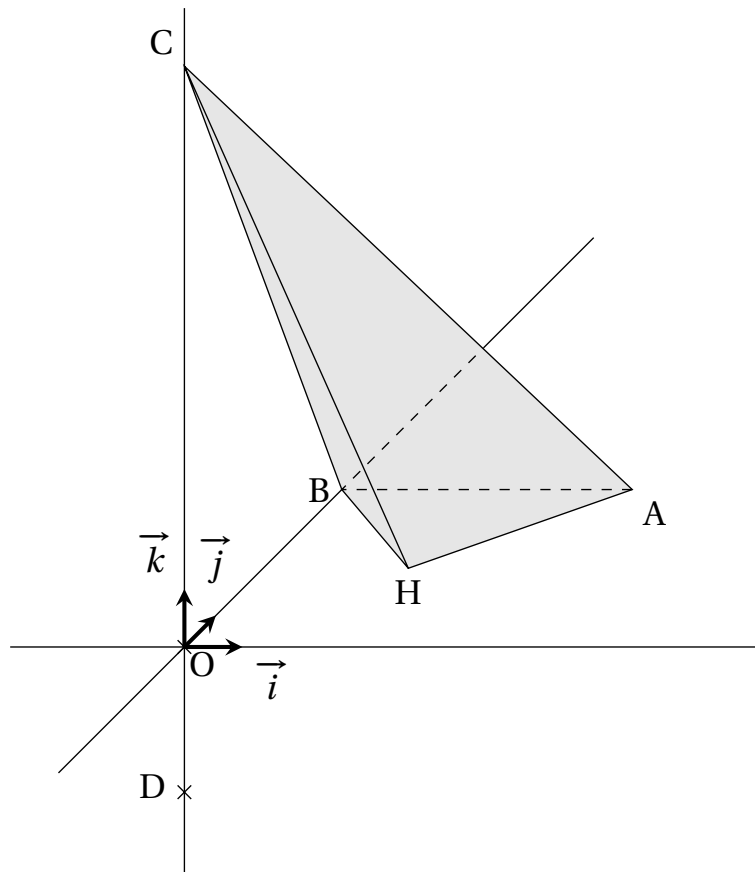
TRIANGLES RECTANGLES ABH & ABC

CORRECTION

1. a. Montrons que \vec{n} est un vecteur normal au plan (CAD):

Étape 1: C, A et D définissent-ils un plan ?

Nous savons que: $C \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $D \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$.



D'après le cours, les points C, A et D définissent un plan ssi les vecteurs \vec{CA} et \vec{CD} ne sont pas colinéaires.

$$\text{Or: } \bullet \vec{CA} = \begin{pmatrix} x_A - x_C \\ y_A - y_C \\ z_A - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \vec{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \\ z_D - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{25}{2} \end{pmatrix}$$

Comme $x_{\vec{CD}} = 0 \times x_{\vec{CA}}$ et $z_{\vec{CD}} \neq 0 \times z_{\vec{CA}}$, les vecteurs \vec{CA} et \vec{CD} ne sont pas colinéaires car ils ne sont pas proportionnels.

Les points C, A et D ne sont donc pas alignés.

Donc les points C, A et D définissent un plan noté (CAD).

Étape 2: \vec{n}_1 est-il un vecteur normal au plan (CAD) ?

Le vecteur $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est normal au plan (CAD) ssi ce vecteur est

orthogonal aux 2 vecteurs non colinéaires du plan (CAD).

$$\text{Or: } \begin{cases} \vec{n}_1 \text{ et } \vec{CA} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n}_1 \cdot \vec{CA} = 0 \\ \vec{n}_1 \text{ et } \vec{CD} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n}_1 \cdot \vec{CD} = 0. \end{cases}$$

$$\text{Nous avons: } \bullet \vec{n}_1 \cdot \vec{CA} = 1 \times 5 + (-1) \times 5 + 0 \times (-10) = 0$$

$$\bullet \vec{n}_1 \cdot \vec{CD} = 1 \times 0 + (-1) \times 0 + 0 \times \left(-\frac{25}{2}\right) = 0.$$

Comme \vec{n}_1 est bien orthogonal à \vec{CA} et à \vec{CD} : le vecteur \vec{n}_1 est normal au plan (CAD).

1. b. Déduisons-en que le plan (CAD) a pour équation cartésienne $x - y = 0$:

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A(x_A; y_A; z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$ s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici: \bullet un vecteur normal est $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

\bullet le point $A \in$ (CAD), avec $A = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$$\Leftrightarrow 1 \times (x - 5) + (-1) \times (y - 5) + 0 \times (z - 0) = 0$$

$$\text{cad } x - y = 0.$$

Une équation cartésienne du plan (CAD) est donc bien: $x - y = 0$.

2. a. Justifions que H a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$:

La droite \mathcal{D} a pour représentation paramétrique:
$$\begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Le point H est le point d'intersection entre la droite \mathcal{D} et le plan (CAD).

Les coordonnées du point H vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_H = \frac{5}{2}t & (1) \\ y_H = 5 - \frac{5}{2}t & (2) \\ z_H = 0 & (3) \\ x_H - y_H = 0 & (4) \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \Leftrightarrow x_H - y_H = 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2}t - \left(5 - \frac{5}{2}t\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5t - 5 = 0$$

$$\text{cad } t = 1.$$

Les coordonnées du point H sont donc: $\bullet x_H = \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{2}$

$$\bullet y_H = 5 - \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{2}.$$

$$\bullet z_H = 0 = 0$$

2. b. Montrons que le point H est le projeté orthogonal de B sur (CAD):

H est-il le projeté orthogonal du point B sur le plan (CAD)?

D'après l'énoncé: $\bullet B \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

• la droite \mathcal{D} a pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Or: $\bullet \begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + \frac{5}{2}xt \\ y = 5 - \frac{5}{2}xt \\ z = 0 + 0xt \end{cases}, t \in \mathbb{R},$

• les coefficients de "t" dans l'équation paramétrique de \mathcal{D} sont

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 2 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme le vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} \times \vec{n}_1$, nous pouvons affirmer que la droite \mathcal{D}

contient le point B et a pour coefficient directeur \vec{n}_1 .

Ainsi le point H est bien le projeté orthogonal de B sur (CAD) .

3. a. Montrons que le triangle ABH est rectangle en H :

Nous avons: $A \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $H \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le triangle ABH est rectangle en H ssi: $AB^2 = AH^2 + BH^2$.

Or: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{AH} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{BH} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions: $\bullet AB^2 = (-5)^2 + 0^2 + 0^2 = 25$

$$\bullet AH^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(2\right)^2 + 0^2 = \frac{25}{2}$$

$$\bullet BH^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(2\right)^2 + 0^2 = \frac{25}{2}$$

Comme $AB^2 = AH^2 + BH^2$, le triangle ABH est rectangle en H.

3. b. Déduisons-en que l'aire du triangle ABH = $\frac{25}{4}$:

$$\begin{aligned} \text{L'aire du triangle ABH est: } \mathcal{A} &= \frac{AH \times BH}{2} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{25}{2}} \times \sqrt{\frac{25}{2}}}{2} \\ &= \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

L'aire du triangle ABH est donc bien égale à: $\mathcal{A} = \frac{25}{4}$.

4. a. Montrons que (CO) est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C:

Il est clair que (CO) correspond bien à la hauteur du tétraèdre issue de C.

$$\begin{aligned} \text{Et: } CO^2 &= (0-0)^2 + (0-0)^2 + (0-10)^2 \\ &= 100. \end{aligned}$$

Ainsi (CO) est bien la hauteur du tétraèdre issue de C avec: $CO = 10$.

4. b. Déduisons-en le volume du tétraèdre ABCH:

Nous savons que le volume V d'un tétraèdre est donné par:

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{B} \times h.$$

(\mathcal{B} = aire d'une base du tétraèdre, h = hauteur à cette base)

Ici, le tétraèdre $ABCH$ a pour hauteur $[CO]$ et pour base le triangle rectangle ABH .

Le volume du tétraèdre $ABCH$ est donc:

$$\begin{aligned} & \frac{(\text{Aire base triangle } ABH) \times (\text{Hauteur tétraèdre } ABCH)}{3} \\ &= \frac{(\text{Aire base triangle } ABH) \times CO}{3} \\ &= \frac{\frac{25}{4} \times 10}{3} \\ &= \frac{125}{6}. \end{aligned}$$

Le volume du tétraèdre $ABCH$ est donc égal à: $V = \frac{125}{6}$ unités de volume.

5. Déduisons la distance du point H au plan (ABC) :

Nous savons que: • $H\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; 0\right)$

• le triangle ABC est rectangle en B

• $V(ABCH) = \frac{125}{6}$.

Soit p la distance du point H au plan (ABC) .

Nous avons: $V(ABCH) = \frac{A(ABC) \times p}{3}$

$$= \frac{AB \times BC}{2} \times p$$

$$= \frac{5 \times (5\sqrt{5})}{2} \times p, \text{ car: } BC^2 = 125$$

$$= \frac{25\sqrt{5}}{6} \times p.$$

On en déduit: $p = V(ABCH) \times \left(\frac{6}{25\sqrt{5}} \right)$

$$= \frac{125}{6} \times \frac{6}{25\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{5}.$$

La distance du point **H** au plan **(ABC)** est donc: $p = \sqrt{5}$.