BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

FRANCE MÉTROPOLITAINE
2023

LA POPULATION D'INSECTES

CORRECTION

PARTIE A

1. Justifions que pour tout entier naturel n, $U_n = 0,1 \times (1,6)^n$:

• D'après l'énoncé, au début de l'étude, la population d'insectes est de **100 000**.

D'où : $U_0 = 0,1$ **insectes** (**exprimé en million**).

• De plus, chaque mois, cette population **augmente de 60%**.

Soient : • U_{n+1}, le nombre d'insectes (en millions) au bout de **(n+1) mois**,

• U_n, le nombre d'insectes (en millions) au bout de **n mois**

Pour tout entier naturel n, l'effectif de la population au début du **mois (n+1)** est égal à celui U_n **augmenté de 60%**.

Pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = U_n + 60\% \times U_n$

cad $U_{n+1} = 1,6 \times U_n$.

Nous sommes donc en présence d'**une suite géométrique** de raison $q = 1,6$ et de premier terme $U_0 = 0,1$.

Dans ces conditions, nous pouvons écrire que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = U_0 \times q^n \text{ cad } U_n = 0,1 \times (1,6)^n.$$

2. Déterminons la limite de la suite (U_n):

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 0,1 \times (1,6)^n$$

$$= +\infty \quad \text{car} \quad 1,6 > 1.$$

Ainsi: $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

3. Déterminons le plus petit entier naturel n tel que $U_n > 0,4$:

$$U_n > 0,4 \iff 0,1 \times (1,6)^n > 0,4$$

$$\iff n \times \ln(1,6) > \ln(4)$$

$$\iff n > \frac{\ln(4)}{\ln(1,6)}$$

$$\text{cad } n > 2,95 \text{ ou } n \geqslant 3 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ainsi, le plus petit entier naturel n tel que $U_n > 0,4$ est: $n = 3$.

4. L'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ?

L'équilibre du milieu naturel sera préservé ssi à long terme:

$$U_n < 400000 \text{ insectes.}$$

Or, dès le 3[e] mois $(n = 3)$, le nombre d'insectes dépasse la barre des 400000.

Dans ces conditions: NON, l'équilibre du milieu naturel ne sera pas préservé.

PARTIE B

1. Déterminons le nombre d'insectes au bout d'un mois:

Ici: • $V_{n+1} = 1,6V_n - 1,6V_n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $V_0 = 0,1$.

Dans ces conditions, le nombre d'insectes au bout d'un mois sera:

$$V_1 = 1,6 \times (0,1) - 1,6 \times (0,1)^2 \text{ cad } V_1 = 0,144.$$

Ainsi, le nombre d'insectes au bout d'un mois sera de: 144000.

2. a. Résolvons l'équation $f(x) = x$:

Ici: • $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$ (U)

• $\mathcal{D}f = \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

Dans ces conditions: $f(x) = x \iff 1,6x - 1,6x^2 = x$

$$\iff x(0,6 - 1,6x) = 0$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 0,6 - 1,6x = 0 \end{cases}$$

$$\text{cad} \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{3}{8} \end{cases}.$$

Ainsi, l'équation admet deux solutions dans $\left[0 ; \dfrac{1}{2}\right]$: $x = 0$ et $x = \dfrac{3}{8}$.

2. b. Montrons que f est croissante sur $\left[0 ; \dfrac{1}{2}\right]$:

• Calculons f':

La fonction $f(x) = 1,6x - 1,6x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $\left[0 ; \dfrac{1}{2}\right]$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \left[0 ; \dfrac{1}{2}\right]$.

Pour tout $x \in \left[0 ; \dfrac{1}{2}\right]$: $f'(x) = 1,6 - 3,2x$ (U').

• Étudions le signe de f' sur $\left[0 ; \dfrac{1}{2}\right]$:

Distinguons deux cas pour tout $x \in \left[0 ; \dfrac{1}{2}\right]$.

1er cas : $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0 \iff 1,6 - 3,2x \leqslant 0$ cad $x \geqslant \dfrac{1}{2}$ ou $x \in \left[\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$.

2e cas : $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff 1,6 - 3,2x \geqslant 0$ cad $x \leqslant \dfrac{1}{2}$ ou $x \in \left[0 ; \dfrac{1}{2}\right]$.

Au total comme $x \in \left[0 ; \dfrac{1}{2}\right]$, nous pouvons affirmer que f est croissante.

3. a. **Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$:**

Ici: • $V_{n+1} = f(V_n) = 1,6\,V_n - 1,6\,V_n^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $V_0 = 0,1$

• f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0 \leqslant V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ ".

Initialisation: $0 \leqslant V_0 \leqslant V_1 \leqslant \frac{1}{2}$?

$$\begin{cases} V_0 = 0,1 \text{ d'après l'énoncé} \\ \text{et} \\ V_1 = 0,144. \end{cases}$$

Nous avons donc bien: $0 \leqslant V_0 \leqslant V_1 \leqslant \frac{1}{2}$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $0 \leqslant V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$ et montrons qu'alors $0 \leqslant V_{n+1} \leqslant V_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}$.

Supposons: $\underbrace{0 \leqslant V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}}_{(1)}$, pour un entier naturel n fixé.

D'où: $(1) \Rightarrow f(0) \leqslant f(V_n) \leqslant f(V_{n+1}) \leqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow 0 \leqslant V_{n+1} \leqslant V_{n+2} \leqslant 0,4 \leqslant \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \; 0 \leqslant V_{n+1} \leqslant V_{n+2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.

3. b. Montrons que la suite (V_n) est convergente:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$0 \leqslant V_n \leqslant V_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \iff \begin{cases} V_n \leqslant V_{n+1} \\ V_n \leqslant \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} (V_n) \text{ est croissante} \\ (V_n) \text{ est majorée par } M = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (V_n) est convergente et converge vers " ℓ ".

3. c. Déterminons la valeur de ℓ:

Comme la suite (V_n) est convergente, elle admet une limite ℓ telle que: $f(\ell) = \ell$.

$$f(\ell) = \ell \iff 1,6\,\ell - 1,6\,\ell^2 = \ell$$

$$\text{cad} \begin{cases} \ell = 0 < 0,1 \quad\quad (V_0) \\ \text{ou} \\ \ell = \frac{3}{8} > 0,1 \end{cases}.$$

Comme $\ell > 0,1$, nous retiendrons: $\ell = \frac{3}{8}$.

3. d. L'équilibre du milieu naturel sera-t-il préservé ?

L'équilibre du milieu naturel sera préservé ssi:

$\ell < 400000$ insectes cad $\ell < 0,4$ (en million).

Comme $\ell = \frac{3}{8} = 0,375 < 0,4$: OUI, avec ce second modèle l'équilibre du milieu naturel sera préservé.

4. a. Qu'observe-t-on si on saisit seuil $(0,4)$?

Si on saisit seuil $(0,4)$, on observe que: le programme ne s'arrête jamais car pas de valeur de n telle que $V_n \geqslant 0,4$.

4. b. Déterminons la valeur renvoyée par la saisie de seuil (0.35):

Si on saisit seuil (0.35), la valeur renvoyée est: 6.

Cela signifie qu'à partir du 6e mois, il y aura plus de 350000 insectes.

En effet: $V_6 \approx 0,358 \geqslant 0,35$.