BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 4

FRANCE MÉTROPOLITAINE 2023

TRIANGLE ÉQUILATÉRAL & TÉTRAÈDRE

CORRECTION

1. Donnons les coordonnées des points E, C et G:

Dans le repère orthonormé (A; $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$) et à l'aide du graphique, les coordonnées des points E, C et G sont:

- E (0; 0; 1) car $\vec{AE} = 0 \times \vec{AB} + 0 \times \vec{AD} + 1 \times \vec{AE}$
- C (1; 1; 0) car $\vec{AC} = 1 \times \vec{AB} + 1 \times \vec{AD} + 0 \times \vec{AE}$
- G (1; 1; 1) car $\vec{AG} = 1 \times \vec{AB} + 1 \times \vec{AD} + 1 \times \vec{AE}$.

Ainsi, les coordonnées des points E, C et G sont: $E\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, G\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (EC):

D'après le cours, nous savons que:

- Soit A (x_A ; y_A ; z_A) un point de l'espace.
- Soit $\vec{u}$ (a; b; c) un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t.a \\ y = y_A + t.b \\ z = z_A + t.c \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Ici: • la droite (EC) passe par le point **E (0 ; 0 ; 1)**

• un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (EC) est:

$$\vec{u} = \overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_C - x_E \\ y_C - y_E \\ z_C - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où une représentation paramétrique de la droite (EC) passant par le point E et de vecteur directeur $\vec{u}$ (1; 1; 0) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \times t \\ y = 0 + 1 \times t \\ z = 1 + (-1) \times t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (EC) est donc:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} , t \in \mathbb{R}.$$

3. Démontrons que la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD):

Les points G, B et D ne sont pas alignés.

Par conséquent, le plan (GBD) admet pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{BD}$.

D'après le cours, la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD) si et seulement si: **le vecteur $\overrightarrow{EC}$ est orthogonal aux deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan.**

Ici: • le vecteur $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

• les deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan (GBD) ont pour coordonnées:

$$\bullet\ \overrightarrow{GB} = \begin{pmatrix} x_B - x_G \\ y_B - y_G \\ z_B - z_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 0-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\bullet\ \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} x_D - x_B \\ y_D - y_B \\ z_D - z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Or: $\begin{cases} \overrightarrow{EC} \text{ et } \overrightarrow{GB} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{EC}.\overrightarrow{GB} = 0 \\ \overrightarrow{EC} \text{ et } \overrightarrow{BD} \text{ sont orthogonaux ssi } \overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BD} = 0. \end{cases}$

Nous avons: • $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{GB} = 1 \times 0 + 1 \times (-1) + (-1) \times (-1) = 0$

• $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{BD} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + (-1) \times 0 = 0.$

Comme $\overrightarrow{EC}$ est bien orthogonal à $\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{BD}$: **la droite (EC) est orthogonale au plan (GBD).**

4. a. Justifions qu'une équation cartésienne du plan (GBD) est $x + y - z - 1 = 0$:

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point $A\,(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et un vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;b\,;c)$ s'écrit:

$$a\,(x - x_A) + b\,(y - y_A) + c\,(z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est $\vec{n} = \overrightarrow{EC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

• le point B ∈ (GBD), avec $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, nous pouvons écrire: $a\,(x - x_B) + b\,(y - y_B) + c\,(z - z_B) = 0$

$\iff 1 \times (x - 1) + 1 \times (y - 0) + (-1) \times (z - 0) = 0$

cad $x - 1 + y - z = 0.$

Une équation cartésienne du plan (GBD) est donc: $x + y - z - 1 = 0.$

4. b. Montrons que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$:

D'après l'énoncé, le point I est le point d'intersection du plan (GBD) avec la droite (EC).

Ainsi, le point $I\,(x_I\,;y_I\,;z_I)$ appartient à la droite (EC) et au plan (GBD).

Nous savons que: • une représentation paramétrique de la droite (EC) est

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

• une équation cartésienne du plan (GBD) est

$$x + y - z - 1 = 0.$$

Comme $I\,(x_I ; y_I ; z_I) \in (EC)$: $\begin{cases} x_I = t \\ y_I = t \\ z_I = 1 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Et comme $I\,(x_I ; y_I ; z_I) \in (GBD)$, nous pouvons écrire:

$$x_I + y_I - z_I - 1 = 0$$

$$\iff t + t - (1 - t) - 1 = 0$$

cad $t = \dfrac{2}{3}$.

Dans ces conditions, les coordonnées du point I sont:

$$\begin{cases} x_I = t = \dfrac{2}{3} \\ y_I = t = \dfrac{2}{3} \\ z_I = 1 - t = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Au total, les coordonnées du point I sont bien: $I\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$.

4. c. Déduisons-en la distance du point E au plan (GBD):

La droite (EC) est orthogonale au plan (GBD), donc la distance du point E au plan (GBD) est: EI.

Or: $EI^2 = (x_I - x_E)^2 + (y_I - y_E)^2 + (z_I - z_E)^2$

$$= \left(\frac{2}{3} - 0 \right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0 \right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1 \right)^2$$

$$= \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}$$

$$= \frac{12}{9}.$$

La distance du plan E au plan (GBD) est donc: $EI = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

5. a. Montrons que le triangle BDG est équilatéral:

Nous savons qu'un triangle est équilatéral ssi: **ses trois côtés ont la même longueur**.

Donc ici le triangle BDG est équilatéral ssi: $BD = DG = GB$.

Or: • $BD^2 = (x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2 + (z_D - z_B)^2$

$$= (0 - 1)^2 + (1 - 0)^2 + (0 - 0)^2$$

$$= 2$$

• $DG^2 = (x_G - x_D)^2 + (y_G - y_D)^2 + (z_G - z_D)^2$

$$= (1 - 0)^2 + (1 - 1)^2 + (1 - 0)^2$$

$$= 2$$

• $GB^2 = (x_B - x_G)^2 + (y_B - y_G)^2 + (z_B - z_G)^2$

$$= (1 - 1)^2 + (0 - 1)^2 + (0 - 1)^2$$

$= 2.$

Ainsi nous avons bien $BD = DG = GB = \sqrt{2}$, et donc: le triangle BDG est bien équilatéral.

5. b. Calculons l'aire du triangle BDG:

Nous venons de montrer que le triangle BDG est équilatéral avec des côtés de longueur: $L = \sqrt{2}$.

D'après le cours, l'aire d'un triangle équilatéral avec des côtes de longueur L est:

$$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times L^2.$$

Donc ici, l'aire du triangle BDG est: $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2$ cad $\mathcal{A} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Justifions que le volume du tétraèdre EGBD est égal à $\frac{1}{3}$:

Le volume d'un tétraèdre est donné par: $V = \frac{1}{3}\,\mathcal{B} \times h.$

($\mathcal{B}$ = aire d'une base du tétraèdre, h = hauteur à cette base).

Le volume du tétraèdre EGBD est donc: $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times EI$ cad $V = \frac{1}{3}$.