BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

MAYOTTE, RÉUNION
2023

$$f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$$

CORRECTION

1. Déterminons la limite de la fonction f en 0 et en $+\infty$:

Ici: • $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$ ($U - V \times \ln(W)$)

• $\mathcal{D}f =]0; +\infty[$.

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$?

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 3x + 1 - 2x \ln(x).$$

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to 0^+} 3x + 1 = 1$

• $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0.$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 - 2 \times (0) = 1.$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$?

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = x \times \left[3 + \dfrac{1}{x} - 2 \ln(x) \right]$. ($x \neq 0$)

D'où: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x \times \left[3 + \dfrac{1}{x} - 2 \ln(x) \right]$.

Or d'après le cours: • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty.$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \times [\, 3 + 0 - 2 \times (+\infty) \,] = -\infty.$

2. a. Montrons que pour tout réel $x \in \,]\, 0 \,;+\infty\, [$, $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$:

D'après l'énoncé, la fonction $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$ est deux fois dérivable sur $]\, 0 \,;+\infty\, [$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in \,]\, 0 \,;+\infty\, [$.

Pour tout $x \in \,]\, 0 \,;+\infty\, [$: $f'(x) = 3 - \left[(2) \times (\ln(x)) + (2x) \times \left(\dfrac{1}{x} \right) \right]$

$\left(U' - (V' \times \ln(W)) + V \times \dfrac{W'}{W} \right)$

$= 3 - 2\ln(x) - 2$

$= 1 - 2\ln(x).$

Pour tout réel $x \in \,]\, 0 \,;+\infty\, [$, nous avons: $f'(x) = 1 - 2\ln(x).$

2. b. b1. Étudions le signe de f' sur $]\, 0 \,;+\infty\, [$:

Distinguons deux cas pour tout $x \in \,]\, 0 \,;+\infty\, [$.

1er cas: $f'(x) \leqslant 0.$

$f'(x) \leqslant 0 \iff 1 - 2\ln(x) \leqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant \frac{1}{2}$

cad $x \geqslant e^{\frac{1}{2}}$ ou $x \in \left[e^{\frac{1}{2}} ; +\infty \right[$.

2ᵉ cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff 1 - 2\ln(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \leqslant \frac{1}{2}$

cad $x \leqslant e^{\frac{1}{2}}$ ou $x \in \left] 0 ; e^{\frac{1}{2}} \right]$.

Ainsi: • f est croissante sur $\left] 0 ; e^{\frac{1}{2}} \right]$,

• f est décroissante sur $\left[e^{\frac{1}{2}} ; +\infty \right[$.

2. b. b2. Dressons le tableau de variations de la fonction f sur $] 0 ; +\infty [$:

Le tableau de variations de la fonction f sur $] 0 ; +\infty [$ est:

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = 1$

• $b = f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = 2\, e^{\frac{1}{2}} + 1$ (maximum de f sur $] 0 ; +\infty [$)

• $c = -\infty$.

3. a. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

Préalablement, notons: la solution recherchée se trouve dans $]\,e^{\frac{1}{2}}\,;+\infty\,[$.

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: **Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [\,a\,;b\,]$ ou $I =]\,a\,;b\,[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.**

Ici: • f est continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$, donc sur $]\,e^{\frac{1}{2}}\,;+\infty\,[$,

• " $k = 0$ " est compris entre: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty < 0$

et: $f(e^{\frac{1}{2}}) = 2e^{\frac{1}{2}} + 1 > 0$,

• f est strictement décroissante sur $]\,e^{\frac{1}{2}}\,;+\infty\,[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $]\,e^{\frac{1}{2}}\,;+\infty\,[$.

3. b. Déduisons-en le signe de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$:

Nous pouvons en déduire le signe de la fonction f via le tableau suivant:

x	0		$e^{\frac{1}{2}}$		α		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$		$-$	
f	‖ 1	$\nearrow$	b	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
Signe de f	‖		$+$		0	$-$	

4. F strictement décroissant sur $[\, e^{\frac{1}{2}} ; +\infty\, [$?

Ici la fonction F est une primitive de la fonction f sur $]\, 0 ; +\infty\, [$.

Dans ces conditions, pour tout $x \in IR$: $\mathbf{F'(x) = f(x)}$.

Or sur $[\, e^{\frac{1}{2}} ; +\infty\, [$, la fonction f est **tantôt positive, tantôt négative**, d'après la question précédente.

Donc sur $[\, e^{\frac{1}{2}} ; +\infty\, [$: **F est tantôt croissante, tantôt décroissante.**

D'où F est strictement décroissante sur $[\, e^{\frac{1}{2}} ; +\infty\, [$? : FAUX !!

5. a. a1. Étudions la convexité de la fonction f sur $]\, 0 ; +\infty\, [$:

D'après le cours :
- f est concave sur I ssi $f''(x) \leqslant 0$ **pour tout** $x \in I$
- f est convexe sur I ssi $f''(x) \geqslant 0$ **pour tout** $x \in I$.

Pour répondre à la question, nous allons étudier le signe de f'' sur $]\, 0 ; +\infty\, [$.

Or pour tout $x \in\,]\, 0 ; +\infty\, [$: $f'(x) = 1 - 2 \ln(x)$.

Et donc pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$: $f''(x) = -\dfrac{2}{x} < 0$.

Ainsi : f est concave, et même strictement concave, sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

5. a. a2. La position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à ses tangentes ?

Comme la fonction f est concave : la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessous de toutes ses tangentes.

5. b. Déterminons une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A $(1\,;f(1))$:

L'équation de la tangente T s'écrit : $y = f'(x_A) \times (x - x_A) + f(x_A)$

cad : $y = f'(x_A) \times (x - 1) + f(1)$.

Or ici :
- $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln(x)$, pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$,
- $f'(x) = 1 - 2\ln(x)$, pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$,
- $f(1) = 4$,
- $f'(1) = 1$.

Dans ces conditions : $y = 1 \times (x - 1) + 4$

cad : $y = x + 3$.

L'équation de la tangente T est donc : $y = x + 3$.

5. c. Déduisons-en que pour tout réel $x \in]\,0\,;+\infty\,[$, $\ln(x) \geq 1 - \dfrac{1}{x}$:

Comme nous l'avons vu, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de toutes ses tangentes, et en particulier au-dessous de la tangente T.

Donc $\mathcal{C}_f$ étant au-dessous de T, nous pouvons écrire pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$:

$$f(x) \leqslant x+3 \iff 3x + 1 - 2x\ln(x) \leqslant x+3$$

$$\iff 2x - 2x\ln(x) \leqslant 2$$

$$\iff x - x\ln(x) \leqslant 1$$

$$\iff 1 - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}$$

cad: $\ln(x) \geqslant 1 - \dfrac{1}{x}$.

Au total, pour tout $x \in]\,0\,;+\infty\,[$: $\ln(x) \geqslant 1 - \dfrac{1}{x}$.