BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 2

CENTRES ÉTRANGERS 1

2023

$f(x) = \ln(2x+3) - 1$

CORRECTION

PARTIE A

1. Déterminons la limite de la fonction g en " - 1, 5 ":

Ici: • $g(x) = f(x) - x = \ln(2x+3) - 1 - x$ $(\ln(U) + V)$

• $\mathcal{D}g =]-1,5 ; +\infty[$.

$$\lim_{x \to -1,5} g(x) = \lim_{X \to 0^+} \ln(X) - 1 - \left[\frac{X-3}{2}\right]$$, en posant $X = 2x + 3$

$$= \lim_{X \to 0^+} \ln(X) - \frac{X}{2} + \frac{1}{2}.$$

Or d'après le cours : • $\lim_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$

• $\lim_{X \to 0^+} -\frac{X}{2} = 0.$

Dans ces conditions : $\lim_{X \to -1,5} g(x) = \lim_{X \to 0^+} \ln(X) - \frac{X}{2} + \frac{1}{2}$

$$= -\infty - 0 + \frac{1}{2}$$

$= -\infty.$

2. Étudions les variations de la fonction g sur $]-1,5 ; +\infty[$:

• Calculons g' sur $]-1,5 ; +\infty[$:

La fonction $g(x) = \ln(2x+3) - 1 - x$ est dérivable sur $]-1,5 ; +\infty[$ comme somme de deux fonctions définies et dérivables sur $]-1,5 ; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer g' pour tout $x \in]-1,5 ; +\infty[$.

Pour tout $x \in]-1,5 ; +\infty[$: $g'(x) = \dfrac{2}{2x+3} - 1 \quad \left(\dfrac{u'}{u} + v'\right)$

$$= \frac{2 - (2x+3)}{(2x+3)}$$

$$= \frac{-(2x+1)}{2x+3}.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-1,5 ; +\infty[$: $g'(x) = \dfrac{-(2x+1)}{2x+3}$.

• Étudions le signe de g' sur $]-1,5 ; +\infty[$:

Distinguons deux cas pour tout $x \in]-1,5 ; +\infty[$, sachant que $2x+3 > 0$.

1er cas: $g'(x) \leqslant 0$.

$g'(x) \leqslant 0 \iff -(2x+1) \leqslant 0 \iff 2x+1 \geqslant 0$

cad $x \geqslant -\dfrac{1}{2}$ ou $x \in \left[-\dfrac{1}{2} ; +\infty\right[$.

2e cas: $g'(x) \geqslant 0$.

$g'(x) \geqslant 0 \iff -(2x+1) \geqslant 0 \iff 2x+1 \leqslant 0$

cad $x \leqslant -\frac{1}{2}$ ou $x \in \left]-1,5 ; -\frac{1}{2}\right]$.

Ainsi: • g est croissante sur $\left]-1,5 ; -\frac{1}{2}\right]$,

• g est décroissante sur $\left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

• **Dressons le tableau de variations de g sur $]-1,5 ; +\infty[$:**

Le tableau de variations de la fonction g sur $]-1,5 ; +\infty[$ est:

x	$-1,5$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
g'	‖	+	0	-	
g	‖ a	↗	b	↘	c

Avec: • $a = -\infty$

• $b = g\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln(2) - \frac{1}{2}$ (maximum de g sur $]-1,5 ; +\infty[$)

• $c = -\infty$.

3. a. Montrons que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-0,5 ; +\infty[$:

Nous allons appliquer le **corollaire** du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [\, a ; b \,]$ ou $I =]\, a ; b \,[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I.

Ici: • g est continue sur $]-1,5 ; +\infty[$, donc continue sur $]-0,5 ; +\infty[$,

• " k = 0 " est compris entre: $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty < 0$

et: $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln(2) - \frac{1}{2} > 0$,

• g est strictement décroissante sur $\left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[=]-0,5 ; +\infty[$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ (k = 0) admet bien une unique solution α appartenant à $]-0,5 ; +\infty[$.

3. b. Donnons un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}:

A l'aide d'une calculatrice, nous trouvons: $0,25 \leqslant \alpha \leqslant 0,26$.

PARTIE B

1. Montrons que si $x \in [-1 ; \alpha]$ alors $f(x) \in [-1 ; \alpha]$:

$x \in [-1 ; \alpha] \Rightarrow -1 \leqslant x \leqslant \alpha$

$\Rightarrow \; -2 \leqslant 2x \leqslant 2\alpha$

$\Rightarrow \; 1 \leqslant 2x + 3 \leqslant 2\alpha + 3$

$\Rightarrow \; \ln(1) \leqslant \ln(2x+3) \leqslant \ln(2\alpha + 3)$

$\Rightarrow \; \ln(1) - 1 \leqslant \ln(2x+3) - 1 \leqslant \ln(2\alpha + 3) - 1$

$\Rightarrow \; -1 \leqslant f(x) \leqslant \ln(2\alpha + 3) - 1$

$\Rightarrow \; -1 \leqslant f(x) \leqslant \alpha$ car $\ln(2\alpha + 3) - 1 \approx \alpha$.

Au total nous avons bien: $x \in [-1; \alpha] \Rightarrow f(x) \in [-1; \alpha]$.

2. a. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant \alpha$:

Ici:
- $U_{n+1} = f(U_n) = \ln(2U_n + 3) - 1$.
- $U_0 = 0$
- $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $-1 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant \alpha$ ".

Initialisation: $-1 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant \alpha$?

$U_0 = 0$, d'après l'énoncé

et

$U_1 = \ln(2U_0 + 3) - 1$ cad $U_1 = \ln(3) - 1$.

Nous avons donc bien: $-1 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant \alpha$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $-1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \alpha$ et montrons qu'alors $-1 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq \alpha$.

Supposons: $-1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \alpha$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

Notons que: • $x \in [-1; \alpha] \Rightarrow f(x) \in [-1; \alpha]$.

• f est croissante sur $]-1,5; +\infty[$ et donc sur $[-1; \alpha]$.

D'où: $(1) \Rightarrow -1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \alpha$

$\Rightarrow f(-1) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(\alpha)$

$\Rightarrow \ln(2 \times (-1) + 3) - 1 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq \ln(2 \times \alpha + 3) - 1$

$\Rightarrow -1 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq \ln(2\alpha + 3) - 1$

$\Rightarrow -1 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq \alpha$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $-1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \alpha$.

2. b Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$-1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq \alpha \iff \begin{cases} U_n \leq U_{n+1} \\ U_n \leq \alpha \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (U_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est majorée par } M = \alpha \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (U_n) est convergente et converge vers " ℓ ".