# BACCALAURÉAT
# MATHÉMATIQUES

## SUJET 1

## CORRIGÉ EXERCICE 1

# ASIE
## 2023

# L'ARBORICULTEUR

## CORRECTION

## PARTIE A



**1. a. Calculons $U_1$ et $U_2$:**

Ici: • $U_{n+1} = 0,9\ U_n + 60$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = 400$.

Dans ces conditions: • $U_1 = 0,9 \times U_0 + 60 = 420$

• $U_2 = 0,9 \times U_1 + 60 = 438$.

Ainsi: $U_1 = 420$, $U_2 = 438$.

**1. b. Conjecturons le sens de variation de la suite $(U_n)$:**

La conjecture que nous pouvons émettre est que: la suite $(U_n)$ semble être croissante.

**2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 600$:**

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 600$ ".

**Initialisation**: $0 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 600$ ?

$U_0 = 400$ d'après l'énoncé

$U_1 = 420$.

Nous avons donc bien: $0 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 600$.

**Donc vrai au rang " 0 ".**

**Hérédité**: Supposons que pour un certain entier naturel n, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 600$ et montrons qu'alors $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 600$.

**Supposons**: $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 600$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

D'où: (1) $\Rightarrow$ $0,9 \times 0 \leqslant 0,9 \times U_n \leqslant 0,9 \times U_{n+1} \leqslant 0,9 \times 600$

$\Rightarrow$ $0,9 \times 0 + 60 \leqslant 0,9 \times U_n + 60 \leqslant 0,9 \times U_{n+1} + 60 \leqslant 0,9 \times 600 + 60$

$\Rightarrow$ $0 \leqslant 60 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 600$

$\Rightarrow$ $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 600$.

**Conclusion**: **Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 600$.**

**3. a. Montrons que la suite $(U_n)$ est convergente**:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 600 \iff \begin{cases} U_n \leqslant U_{n+1} \\ U_n \leqslant 600 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est croissante} \\ (U_n) \text{ est majorée par } M = 6 \end{cases}$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: la suite $(U_n)$ est convergente et converge vers " $\ell$ ".

### 3. b. Déterminons la limite de la suite $(U_n)$:

Comme la suite $(U_n)$ est convergente, elle admet une limite $\ell$ telle que:

$$f(\ell) = \ell.$$

$f(\ell) = \ell \iff \ell = 0,9 \times \ell + 60$

$\iff 0,1 \times \ell = 60$

cad $\ell = 600$.

Ainsi, la limite de la suite $(U_n)$ est: $\ell = 600$.

La suite $(U_n)$ converge donc vers 600.

### 4. Quelle valeur en tapant mystere (500) ?

A l'aide d'une calculatrice, nous avons: $U_6 \approx 494$ et $U_7 \approx 504$.

Ainsi, la valeur obtenue en tapant dans la console de Python mystere (500) est: 7.

## PARTIE B

### L'arboriculteur va-t-il être confronté à un problème de place dans son verger ?

• Ici, l'arboriculteur possède un grand verger sur lequel il peut cultiver au maximum **500 arbres**.

- Comme chaque année il vend 10% des arbres et en remplace 60, son modèle suit la relation de récurrence: $U_{n+1} = 0,9 \times U_n + 60$.

- Le verger compte 400 arbres en 2023, d'où: $U_0 = 400$ **arbres**.

Or, comme vu à la question précédente, à long terme la suite $(U_n)$ converge vers $\ell = 600$ **arbres**.

**Comme 600 > 500: OUI, l'arboriculteur va être confronté à un problème de place dans son verger.**