

www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ
EXERCICE 2



ANTILLES-GUYANE
2023

$$f(x) = x^2 - 8 \ln(x)$$

CORRECTION

1. Déterminons $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$:

Ici: • $f(x) = x^2 - 8 \ln(x)$ $(U - 8 \ln(V))$

• $\mathcal{D}f =]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 8 \ln(x).$$

Or d'après le cours: • $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$.

Dans ces conditions: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 - 8 \times (-\infty) = +\infty$.

2. Déduisons-en la limite de $f(x)$ en $+\infty$:

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire: $f(x) = x^2 \times \left(1 - \frac{8 \ln(x)}{x^2}\right)$. $(x > 0)$

D'où: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{8 \ln(x)}{x^2}\right)$.

Or d'après le cours: • $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$ (Croissances Comparées).

Dans ces conditions: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \times (1 - 0) = +\infty$.

3. Montrons que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{2(x^2 - 4)}{x}$.

La fonction $f(x) = x^2 - 8 \ln(x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0; +\infty[$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in]0; +\infty[: \quad f'(x) &= 2x - 8x \left(\frac{1}{x} \right) \quad \left(u' - 8x \frac{v'}{v} \right) \\ &= 2x - \frac{8}{x} \\ &= \frac{2x^2 - 8}{x} \\ &= \frac{2(x^2 - 4)}{x}. \end{aligned}$$

Donc nous avons bien pour tout $x \in]0; +\infty[: \quad f'(x) = \frac{2(x^2 - 4)}{x}$.

4. a. Étudions le signe de f' sur $]0; +\infty[$:

Préalablement, notons que: le signe de f' dépend du signe de $(x^2 - 4)$ car

pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\frac{2}{x} > 0$.

Distinguons deux cas pour tout $x \in]0; +\infty[$.

1^{er} cas: $f'(x) \leq 0$.

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow x \in [-2; 2] \text{ cad ici } x \in]0; 2].$$

2^e cas: $f'(x) \geq 0$.

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -2] \cup [2; +\infty[\text{ cad ici } x \in [2; +\infty[.$$

Ainsi: • f est décroissante sur $]0; 2]$,

• f est croissante sur $[2; +\infty[$.

4. b. Dressons le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$:

Le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$ est:

x	0	2	$+\infty$	
f'		-	0	+
f		a	b	c

Avec: • $a = +\infty$

- $b = f(2) = 4 - 8 \ln(2)$ (minimum de f sur $]0; +\infty[$)

- $c = +\infty$.

5. Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0; 2]$:

Nous allons appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

D'après le corollaire du TVI: Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$ ($a < b$). Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans I .

Ici: • f est continue sur $]0; +\infty[$, donc sur $]0; 2]$,

- " $k = 0$ " est compris entre: $f(2) = 4 - 8 \ln(2) < 0$

$$\text{et: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty > 0,$$

- f est strictement décroissante sur $]0; 2]$.

Ainsi, d'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 0$ ($k = 0$) admet bien une unique solution α appartenant à $]0; 2]$.

6. Déduisons-en le signe de f sur $]0; +\infty[$:

D'après l'énoncé, sur $[2; +\infty[$: $f(x) = 0$ admet une unique solution β .

Dans ces conditions, nous pouvons en déduire le signe de la fonction f via le tableau suivant:

x	0	α	2	β	$+\infty$
f'		-	0	+	+
f	$+\infty$	0	b	0	$+\infty$
Signe de f		+	-	+	

7. Déterminons la plus petite valeur de " k " telle que $g_k(x) \geq 0$ sur $]0; +\infty[$:

Ici: $\bullet g_k(x) = x^2 - 8 \ln(x) + k = f(x) + k$

$\bullet \mathcal{D}g_k =]0; +\infty[$.

Comme $g_k(x) = f(x) + k$, la fonction g_k a donc les mêmes variations que la fonction f sur $]0; +\infty[$.

g_k admet donc comme minimum le point A $(2; 4 - 8 \ln(2) + k)$.

La plus petite valeur de k pour laquelle $g_k(x) \geq 0$ sur $]0; +\infty[$ est donc telle que: $4 - 8 \ln(2) + k \geq 0$ cad $k \geq 8 \ln(2) - 4$.

La plus petite valeur de " k " est donc: $8 \ln(2) - 4$.