BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

POLYNÉSIE

2022

$$f(x) = 0,008\, x\, (200 - x)$$

CORRECTION

1. Donnons une estimation du nombre d'oiseaux début 2022:

Il s'agit de calculer ici: U_1.

Or:
- $U_{n+1} = 0,008\, U_n\, (200 - U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $U_0 = 40$.

Dans ces conditions: $U_1 = 0,008 \times U_0 \times (200 - U_0)$

$= 0,008 \times 40 \times (200 - 40)$

$= 51,2$ oiseaux. (≈ 51 oiseaux)

Une estimation du nombre d'oiseaux au début de l'année 2022 est d'environ: 51.

2. Résolvons dans $[\,0\,;\,100\,]$ l'équation $f(x) = x$:

Ici:
- $f(x) = 0,008\, x\, (200 - x)$ ($U \times V$)
- $\mathcal{D}f = [\,0\,;\,100\,]$.

Ainsi: $f(x) = x \iff 0,008x\,(200 - x) = x$

$$\Leftrightarrow \quad x\,[\,0,008\,(200 - x) - 1\,] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 0,008\,(200 - x) - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ 1,6 - 0,008 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = 75 \end{cases}$$

Dans [0 ; 100], l'équation $f(x) = x$ admet donc 2 solutions : 0 et 75.

3. a. a1. Montrons que la fonction f est croissante sur [0 ; 100]:

• **Calculons f':**

La fonction $f(x) = 0,008\,x\,(200 - x)$ est dérivable sur IR comme produit de deux fonctions polynômes dérivables sur IR. Donc f est dérivable sur [0 ; 100].

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [\,0\,;\,100\,]$.

Pour tout $x \in [\,0\,;\,100\,]$: $f'(x) = (0,008) \times (200 - x) + (0,008x) \times (-1)$

(U' x V + U x V')

$= 1,6 - 0,016x.$

Ainsi, pour tout $x \in [\,0\,;\,100\,]$: $f'(x) = 1,6 - 0,016x$.

• **Étudions le signe de f' sur $[\,0\,;\,100\,]$:**

Distinguons deux cas pour tout $x \in [\,0\,;\,100\,]$.

1^er^ cas : $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0 \iff 1,6 - 0,016x \leqslant 0$ cad $x \geqslant 100$ ou $x \in [\,100\,;+\infty\,[$.

2^e^ cas : $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff 1,6 - 0,016x \geqslant 0$ cad $x \leqslant 100$ ou $x \in \,]-\infty\,;\,100\,]$.

Comme nous sommes dans l'intervalle $[\,0\,;\,100\,]$: $f'(x) \geqslant 0$ et donc la fonction f est bien croissante sur $[\,0\,;\,100\,]$.

3. a. a2. Dressons le tableau de variations de f sur $[\,0\,;\,100\,]$:

Le tableau de variations de la fonction f sur $[\,0\,;\,100\,]$ est :

x	0		100
f'		$+$	
f	a	$\nearrow$	b

Avec : • $a = f(0) = 0$

• $b = f(100) = 80$.

3. b. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 100$:

Ici:
- $U_{n+1} = f(U_n)$
- $U_0 = 40$
- $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 100$ ".

Initialisation: $0 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 100$?

$$\begin{cases} U_0 = 40, \text{ d'après l'énoncé} \\ \text{et} \\ U_1 \approx 51, \text{ d'après la question 1.} \end{cases}$$

Nous avons donc bien: $0 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 100$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 100$ et montrons qu'alors $0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 100$.

Supposons: $\underbrace{0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 100}_{(1)}$, pour un entier naturel n fixé.

Notons que: f est croissante sur $[0; 100]$.

D'où: $(1) \Rightarrow 0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 100 \Rightarrow f(0) \leqslant f(U_n) \leqslant f(U_{n+1}) \leqslant f(100)$

$\Rightarrow 0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 80$

$\Rightarrow\ 0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 80 \leqslant 100$

$\Rightarrow\ 0 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 100.$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 100$.

3. c. Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$0 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 100 \iff \begin{cases} U_n \leqslant U_{n+1} \\ U_n \leqslant 100 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (U_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est majorée par } M = 100 \end{cases}$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc: la suite (U_n) est convergente et converge vers " ℓ ".

3. d. Déterminons la limite ℓ de la suite (U_n):

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet une limite $\ell \in [\,40\,;\,100\,]$ telle que: $f(\ell) = \ell$.

$f(\ell) = \ell \iff 0,008\,\ell\,(200 - \ell) = 0$

cad $\ell = 0$ ou $\ell = 75$.

Or: • $\ell = 0 < 40 \notin [\,40\,;\,100\,]$.

• $\ell = 75 \in [\,40\,;\,100\,]$.

Nous retiendrons $\ell = 75$, ce qui signifie: " quand n très grand cad à long terme, la colonie d'oiseaux comptera 75 individus ! ".

4. Expliquons pourquoi à l'aide de la question 3:

Comme la suite (U_n) a pour limite 75 individus, toutes les valeurs de U_n seront inférieures à 75 et par conséquent à 100.

Dans ces conditions, l'exécution de seuil (100) tournera indéfiniment.

La boucle while est donc infinie.