BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

NOUVELLE CALÉDONIE

2022

$f(x) = x^3 e^x$

CORRECTION

1. a. Calculons U_1 et U_2:

Ici: • $U_{n+1} = f(U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = -1$

• $f(x) = x^3 e^x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans ces conditions: $U_{n+1} = U_n^3 e^{U_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Et donc: • $U_1 = U_0^3 e^{U_0}$ cad $U_1 = -e^{-1} \approx -0,368$

• $U_2 = U_1^3 e^{U_1}$ cad $U_2 = -e^{-3}(e^{-e^{-1}}) \approx -0,034$.

Ainsi: $U_1 \approx -0,368$ et $U_2 \approx -0,034$.

1. b. Déterminons, sans justifier, la valeur renvoyée par fonc (2):

La valeur renvoyée par fonc (2) est: $U_2 \approx -0,034$.

2. a. Démontrons que pour tout réel x, $f'(x) = x^2 e^x (x + 3)$:

Ici: • $f(x) = x^3 e^x$ $(U \times e^V)$

• $\mathcal{D}f = \mathbb{R}$.

La fonction $f(x) = x^3\ e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et nous pouvons calculer f' pour tout réel x.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (3x^2) \times (e^x) + (x^3) \times (e^x)$ $\quad (U' \times e^V + U \times V' e^V)$

$$= x^2\ e^x (x + 3).$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = x^2\ e^x (x + 3)$.

2. b. Établissons le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

• Étudions le signe de f' sur $\mathbb{R}$:

Préalablement notons que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x^2\ e^x > 0$.

Donc le signe de f' dépend du **signe de $(x + 3)$**.

Distinguons deux cas pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0 \iff x + 3 \leqslant 0$ cad $x \leqslant -3$ ou $x \in \left]-\infty ; -3\right]$.

2e cas: $f'(x) \geqslant 0$.

$f'(x) \geqslant 0 \iff x + 3 \geqslant 0$ cad $x \geqslant -3$ ou $x \in \left[-3 ; +\infty\right[$.

Ainsi: • f est décroissante sur $\left]-\infty ; -3\right]$,

• f est croissante sur $\left[-3 ; +\infty\right[$.

• Déterminons les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$:

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 e^x = 0$ (Croissances Comparées).

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 e^x = (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$.

Ainsi, les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$ sont respectivement: 0 et $+\infty$.

- **Dressons le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:**

Le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est:

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	a	$\searrow$	b	$\nearrow$	c

Avec: • $a = 0$

• $b = f(-3) = -27\,e^{-3}$ (minimum de f sur $\mathbb{R}$)

• $c = +\infty$.

2. c. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 0$:

Ici: • $U_{n+1} = f(U_n)$

• $U_0 = -1$

• $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $-1 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 0$ ".

Initialisation: $-1 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 0$?

$$\begin{cases} U_0 = -1 \quad \text{d'après l'énoncé} \\ \text{et} \\ U_1 = U_0^3 \, e^{U_0} \quad \text{cad} \quad U_1 = -\dfrac{1}{e} \approx -0{,}368. \end{cases}$$

Nous avons donc bien: $-1 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 0$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $-1 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 0$ et montrons qu'alors $-1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 0$.

Supposons: $-1 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 0$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

Notons que: f est croissante sur $[-3\,;+\infty[$.

Donc: **f est croissante sur $[-1\,;+\infty[$.**

D'où: $(1) \Rightarrow -1 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 0 \Rightarrow f(-1) \leqslant f(U_n) \leqslant f(U_{n+1}) \leqslant f(0)$

$$\Rightarrow -\frac{1}{e} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 0$$

$$\Rightarrow -1 \leqslant -\frac{1}{e} \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 0$$

$$\Rightarrow -1 \leqslant U_{n+1} \leqslant U_{n+2} \leqslant 0.$$

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $-1 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 0$.

2. d. Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$-1 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 0 \iff \begin{cases} U_n \leqslant U_{n+1} \\ U_n \leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est majorée par } M = 0 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (U_n) est convergente **et** converge vers " ℓ ".

2. e. Déterminons la limite ℓ vers laquelle (U_n) converge:

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet une limite $\ell \in [-1\,;0]$ telle que: $f(\ell) = \ell$.

$$f(\ell) = \ell \iff \ell^3 e^\ell = \ell$$

$$\iff \ell\,(\ell^2 e^\ell - 1) = 0.$$

D'où: $\ell = 0 \leqslant \frac{1}{2}$. [" $x^2 e^x - 1 = 0$ possède une seule solution $< \frac{1}{2}$ "].

Au total, (U_n) converge vers ℓ avec: $\ell = 0 \in [-1\,;0]$.