

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

# BACCALAURÉAT MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ  
EXERCICE 3



FRANCE MÉTROPOLITAINE  
2022

# LE CUBE ABCDEFGH

## CORRECTION

1. Précisons les coordonnées des points E, F, G et K:

Dans le repère orthonormé  $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ , les coordonnées des points E, F, G et K sont:

- $E(0; 0; 1)$  car  $\vec{AE} = 0 \times \vec{AB} + 0 \times \vec{AD} + 1 \times \vec{AE}$
- $F(1; 0; 1)$  car  $\vec{AF} = 1 \times \vec{AB} + 0 \times \vec{AD} + 1 \times \vec{AE}$
- $G(1; 1; 1)$  car  $\vec{AG} = 1 \times \vec{AB} + 1 \times \vec{AD} + 1 \times \vec{AE}$
- $K\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$  car  $\vec{AK} = 1 \times \vec{AB} + \frac{1}{2} \times \vec{AD} + 0 \times \vec{AE}$ .

Ainsi, les coordonnées des points E, F, G et K sont:

$$E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } K \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrons que le vecteur  $\vec{n}(2; -2; 1)$  est orthogonal au plan (EGK):

Nous avons:  $E(0; 0; 1), G(1; 1; 1)$  et  $K\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$ .

Dans ces conditions, les vecteurs  $\overrightarrow{EG}$  et  $\overrightarrow{EK}$  ont pour coordonnées:

$$\overrightarrow{EG} = \begin{pmatrix} x_G - x_E \\ y_G - y_E \\ z_G - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{EK} = \begin{pmatrix} x_K - x_E \\ y_K - y_E \\ z_K - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Notons que:  $x \overrightarrow{EG} = 1 \times x \overrightarrow{EK}$  et  $y \overrightarrow{EG} \neq 1 \times y \overrightarrow{EK}$ .

Les vecteurs  $\overrightarrow{EG}$  et  $\overrightarrow{EK}$  ne sont donc pas proportionnels et, par conséquent, ils ne sont pas colinéaires.

Les points E, G et K ne sont donc pas alignés et définissent le plan (EGK).

Le vecteur  $\vec{n}$  (2; -2; 1) est normal au plan (EGK) ssi ce vecteur est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires  $\overrightarrow{EG}$  et  $\overrightarrow{EK}$  du plan (EGK).

Or :

$$\begin{cases} \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{EG} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = 0 \\ \vec{n} \text{ et } \overrightarrow{EK} \text{ sont orthogonaux ssi } \vec{n} \cdot \overrightarrow{EK} = 0. \end{cases}$$

Nous avons:  $\bullet \vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = (2 \times 1) + ((-2) \times 1) + (1 \times 0) = 0$

$$\bullet \vec{n} \cdot \overrightarrow{EK} = (2 \times 1) + \left( (-2) \times \frac{1}{2} \right) + (1 \times (-1)) = 0.$$

Comme  $\vec{n}$  est bien orthogonal à  $\overrightarrow{EG}$  et à  $\overrightarrow{EK}$  : le vecteur  $\vec{n}$  est normal au plan (EGK).

3. Montrons qu'une équation cartésienne du plan (EGK) est  $2x - 2y + z - 1 = 0$ :

D'après le cours, une équation cartésienne d'un plan défini par un point A ( $x_A; y_A; z_A$ ) et un vecteur normal  $\vec{n}$  (a; b; c) s'écrit:

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Or ici: • un vecteur normal est  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

• le point  $E \in (EGK)$ , avec  $E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Ainsi, nous pouvons écrire:  $a(x - x_E) + b(y - y_E) + c(z - z_E) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x(x - 0) - 2x(y - 0) + 1x(z - 1) = 0$$

$$\text{cad } 2x - 2y + z - 1 = 0.$$

Une équation cartésienne du plan (EGK) est donc bien:  $2x - 2y + z - 1 = 0$ .

#### 4. Déterminons une représentation paramétrique de la droite (d):

La droite (d) est orthogonale au plan (EGK) passant par F.

D'après le cours, nous savons que:

- Soit  $A(x_A; y_A; z_A)$  un point de l'espace.
- Soit  $\vec{u}(a; b; c)$  un vecteur non nul de l'espace.
- La droite passant par A de vecteur directeur  $\vec{u}$  admet pour représentation paramétrique:

$$\begin{cases} x = x_A + t \cdot a \\ y = y_A + t \cdot b \\ z = z_A + t \cdot c \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Ici:
- la droite (d) passe par le point F ( 1; 0; 1),
  - un vecteur directeur  $\vec{u}$  de la droite (d) est:

$$\vec{u} = \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où une représentation paramétrique de la droite (d) passant par le point F et de vecteur directeur  $\vec{n}$  ( 2; -2; 1) s'écrit:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 + (-2)t \\ z = 1 + 1t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Une représentation paramétrique de la droite (d) est donc:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

5. Montrons que le point L a pour coordonnées  $\left( \frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{9} \right)$ :

Le point L est le projeté orthogonal de F sur le plan (EGK).

Les coordonnées du point L vérifient donc le système:

$$\begin{cases} x_L = 1 + 2t & (1) \\ y_L = -2t & (2) \\ z_L = 1 + t & (3) \\ 2x_L - 2y_L + z_L - 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

A l'aide des équations (1), (2) et (3), nous pouvons écrire:

$$(4) \Leftrightarrow 2x_L - 2y_L + z_L - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x(1+2t) - 2x(-2t) + (1+t) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + 4t + 4t + 1 + t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9t + 2 = 0$$

$$\text{cad } t = -\frac{2}{9}.$$

Les coordonnées du point L sont donc:  $\bullet x_L = 1 + 2x\left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{5}{9}$

$$\bullet y_L = -2x\left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9}$$

$$\bullet z_L = 1 + \left(-\frac{2}{9}\right) = \frac{7}{9}$$

6. Justifions que la longueur  $LF = \frac{2}{3}$ :

Nous savons que:  $L\left(\frac{5}{9}; \frac{4}{9}; \frac{7}{9}\right)$  et  $F(1; 0; 1)$ .

Dans ces conditions:  $LF^2 = \left(1 - \frac{5}{9}\right)^2 + \left(0 - \frac{4}{9}\right)^2 + \left(1 - \frac{7}{9}\right)^2$

$$= \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2$$

$$= \frac{1}{81} \times (16 + 16 + 4)$$

$$= \frac{36}{81}$$

D'où:  $LF = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ .

La longueur  $LF$  est donc bien égale à:  $\frac{2}{3}$ .

7. a. Calculons l'aire du triangle EFG:

L'aire du triangle rectangle EFG est égale à:  $\mathcal{A}(EFG) = \frac{FE \times FG}{2}$ .

Or: •  $FE = \sqrt{(0-1)^2 + (0-0)^2 + (1-1)^2} = 1$

•  $FG = \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (1-1)^2} = 1$ .

Dans ces conditions:  $\mathcal{A}(EFG) = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$  unité d'aire.

7. b. Déduisons-en que le volume du tétraèdre EFGK est égal à  $\frac{1}{6}$ :

Le tétraèdre EFGK a pour hauteur  $[BF]$  et pour base le triangle EFG.

Le volume du tétraèdre EFGK est donc:

$$\begin{aligned} & \frac{(\text{Aire base triangle EFG}) \times (\text{Hauteur tétraèdre EFGK})}{3} \\ &= \frac{(\text{Aire base triangle EFG}) \times BF}{3} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times 1}{3} \quad \text{car } BF = 1 \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Le volume du tétraèdre EFGK et donc bien égal à:  $\frac{1}{6}$ .

### 8. Déduisons-en l'aire du triangle EGK:

Le tétraèdre EFGK a **aussi** pour hauteur [ LF ] et pour base le triangle EGK.

Nous savons que le volume d'un tétraèdre est donné par:  $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ .

(  $\mathcal{B}$  = aire d'une base,  $h$  = hauteur relative à cette base )

Dans ces conditions:  $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h \Leftrightarrow 3 \times V = \mathcal{B} \times h$

$$\text{cad } \mathcal{B} = \frac{3 \times V}{h}$$

Ici: •  $V = \text{volume du tétraèdre EFGK} = \frac{1}{6}$

•  $h = LF = \frac{2}{3}$ .

L'aire du triangle EGK est donc:  $\mathcal{B} = \frac{3 \times \frac{1}{6}}{\frac{2}{3}}$  cad  $\mathcal{B} = \frac{3}{4}$ .

L'aire du triangle EGK est donc:  $\mathcal{A}' = \frac{3}{4}$  unité d'aire.

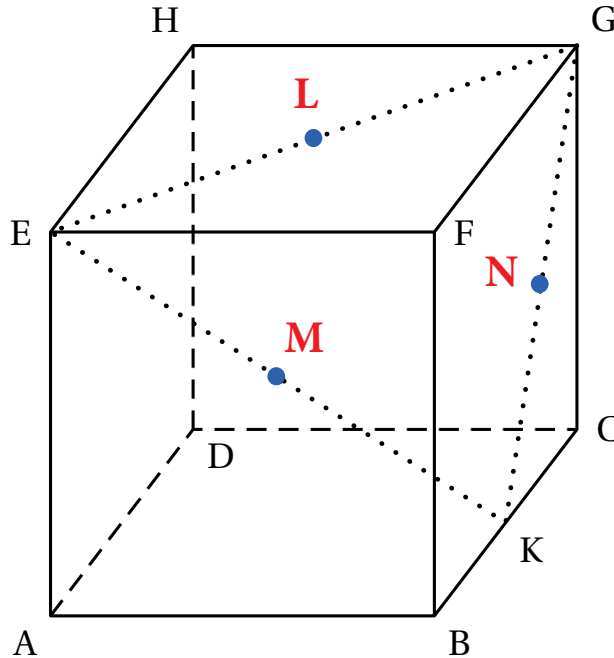
### 9. Déterminons le volume du tétraèdre FLMN:

- L est le milieu du segment [ EG ].
- M est le milieu du segment [ EK ].



- N est le milieu du segment [ GK ].

D'après le théorème de la droite des milieux, les côtés du triangle ( LMN ) ont une longueur moitié de celles du triangle ( EGK ).



L'aire du triangle ( LMN ) est donc:  $A'' = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times A' = \frac{3}{16}$ .

De plus, comme les points L, M et N appartiennent au plan ( EGK ), le triangle LMN appartient au plan ( EGK ).

Ainsi, la hauteur du tétraèdre FLMN est donc la même que celle du tétraèdre EFGK cad  $LF = \frac{2}{3}$ .

D'où le volume du tétraèdre FLMN est égal à:  $V_{FLMN} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{16} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{24}$ .