BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 3

CENTRES ÉTRANGERS 2

2022

$f(x) = x - x\ln(x)$

CORRECTION

PARTIE A

1. Déterminons la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0:

Ici: • $f(x) = x - x\ln(x)$ ($U - U\ln(U)$)

• $\mathcal{D}f =]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x - x\ln(x).$$

Or d'après le cours : • $\lim_{x \to 0^+} x = 0$

• $\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0$. (Croissances Comparées)

Dans ces conditions : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 - 0 = 0$.

2. Déterminons la limite de f quand x tend vers $+\infty$:

En $+\infty$, la fonction f peut s'écrire : $f(x) = x \times (1 - \ln(x))$.

D'où: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x \times (1 - \ln(x))$.

Freemaths : Tous droits réservés

Or d'après le cours: • $\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Dans ces conditions: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$.

3. a. Montrons que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = -\ln(x)$:

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$, d'après l'énoncé.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0;+\infty[$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$: $f'(x) = 1 - \left[(1) \times (\ln(x)) + (x) \times \left(\frac{1}{x}\right)\right]$

$$\left(u' - \left[u' \times \ln(u) + u \times \left(\frac{u'}{u}\right)\right]\right)$$

$= 1 - [\ln(x) + 1]$

$= -\ln(x)$.

Ainsi, pour tout $x > 0$: $f'(x) = -\ln(x)$.

3. b. b1. Déduisons-en les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$:

Distinguons deux cas pour tout $x \in]0;+\infty[$.

1er cas: $f'(x) \leqslant 0$.

$f'(x) \leqslant 0 \iff -\ln(x) \leqslant 0$

$\iff \ln(x) \geqslant 0$ cad $x \geqslant 1$ ou $x \in [1;+\infty[$.

Freemaths : Tous droits réservés

2ᵉ cas : $f'(x) \geq 0$.

$f'(x) \geq 0 \iff -\ln(x) \geq 0$

$\iff \ln(x) \leq 0$ cad $x \leq 1$ ou $x \in]0; 1]$.

Ainsi : • f est croissante sur $]0; 1]$,

• f est décroissante sur $[1; +\infty[$.

3. b. b2. Dressons le tableau de variations de f sur $]0; +\infty[$:

Le tableau de variations de la fonction f sur $]0; +\infty[$ est :

x	0		1		$+\infty$
f'	‖	+	0	-	
f	‖ a	↗	b	↘	c

Avec : • $a = 0$

• $b = f(1) = 1$ (maximum de f sur $]0; +\infty[$)

• $c = -\infty$.

4. Résolvons l'équation $f(x) = x$ sur $]0; +\infty[$:

Sur $]0; +\infty[$: $f(x) = x \iff x - x\ln(x) = x$

Freemaths : Tous droits réservés

$\Longleftrightarrow \; x \ln(x) = 0$

$\Longleftrightarrow \; \ln(x) = 0$ car: $x \neq 0$

cad: $x = 1$.

Ainsi sur $]0; +\infty[$, l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution: $x = 1$.

PARTIE B

Freemaths : Tous droits réservés

1. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0,5 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$:

Ici:
- $U_{n+1} = f(U_n)$
- $U_0 = 0,5$
- $n \in \mathbb{N}$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0,5 \leqslant U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant 1$ ".

Initialisation: $0,5 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 1$?

$$\begin{cases} U_0 = 0,5 \quad \text{d'après l'énoncé} \\ \text{et} \\ U_1 = 0,5 - 0,5 \ln(0,5) \quad \text{cad} \quad U_1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \ln(2). \end{cases}$$

Nous avons donc bien: $0,5 \leqslant U_0 \leqslant U_1 \leqslant 1$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $0,5 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$ et montrons qu'alors $0,5 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 1$.

Supposons: $0,5 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$, pour un entier naturel n fixé.

(1)

Notons que: f est croissante sur $]0; 1]$, donc sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

D'où: (1) => $0,5 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$ => $f(0,5) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \leq f(1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2) \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2) \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0,5 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} \leq 1.$$

Conclusion: **Pour tout entier naturel n, $0,5 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1$.**

2. a. Montrons que la suite (U_n) est convergente:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$0,5 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 1 \iff \begin{cases} U_n \leq U_{n+1} \\ U_n \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est majorée par } M = 1 \end{cases}.$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc: **la suite (U_n) est convergente et converge vers " ℓ ".**

Freemaths : Tous droits réservés

2. b. Déterminons la limite ℓ de la suite (U_n):

Comme la suite (U_n) est convergente, elle admet une limite $\ell \in [\,0,5\,;\,1\,]$

telle que: $f(\ell) = \ell$.

$f(\ell) = \ell \iff \ell = \ell - \ell \times \ln(\ell)$

$\iff \ell \times \ln(\ell) = 0$

$\iff \ln(\ell) = 0$ car: $\ell \in [\,0,5\,;\,1\,]$

cad $\ell = 1$.

Au total, (U_n) converge vers ℓ avec: $\ell = 1 \in [\,0,5\,;\,1\,]$.

Freemaths : Tous droits réservés

PARTIE C

1. Montrons que f_k admet un maximum y_k atteint en $x_k = e^{(k-1)}$:

Ici: • $f_k(x) = kx - x\ln(x)$

• $\mathcal{D}f_k =]\,0\,;+\infty\,[$.

• Calculons $f_k'(x)$ sur $]\,0, +\infty\,[$:

La fonction $f_k(x) = kx - x \times \ln(x)$ est dérivable sur $]\,0, +\infty\,[$.

Nous pouvons donc calculer f'_k pour tout $x \in]\,0, +\infty\,[$:

$$f_k'(x) = k - \left[\,1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\,\right]$$

$= k - [\ln(x) + 1]$.

Ainsi, pour tout $x \in]0; +\infty[$: $f_k'(x) = k - [\ln(x) + 1]$.

• **Signe de f_k' sur $]0; +\infty[$:**

Distinguons deux cas pour tout $x \in]0; +\infty[$.

1er cas : $f_k'(x) \leqslant 0$.

$f_K'(x) \leqslant 0 \iff k - [\ln(x) + 1] \leqslant 0$

$\iff (k - 1) - \ln(x) \leqslant 0$

$\iff \ln(x) \geqslant (k - 1)$

cad $x \geqslant e^{(k-1)}$ ou $x \in [e^{(k-1)}; +\infty[$.

2e cas : $f_k'(x) \geqslant 0$.

$f_K'(x) \geqslant 0 \iff k - [\ln(x) + 1] \geqslant 0$

$\iff (k - 1) - \ln(x) \geqslant 0$

$\iff \ln(x) \leqslant (k - 1)$

cad $x \leqslant e^{(k-1)}$ ou $x \in]0; e^{(k-1)}]$.

Ainsi : • f_k est croissante sur $]0; e^{(k-1)}]$,

• f_k est décroissante sur $[e^{(k-1)}; +\infty[$.

• **Conclusion :**

La fonction f_K admet bien un maximum y_k atteint en $x_K = e^{(k-1)}$.

Freemaths : Tous droits réservés

Et nous avons: $g_k = f(x_k)$

<=> $y_k = k\,e^{(k-1)} - e^{(k-1)} \times \ln(e^{(k-1)})$

<=> $y_k = k\,e^{(k-1)} - e^{(k-1)} \times (k-1)$

cad $y_k = e^{(k-1)}$.

2. Vérifions que pour tout $k \in \mathbb{R}$, $x_k = y_k$:

Comme vu à la question précédente: $x_k = y_k = e^{(k-1)}$.

Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{R}$: $x_k = y_k$.

Freemaths : Tous droits réservés