BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 2

CORRIGÉ EXERCICE 4

ASIE
2022

LA BACTÉRIE

CORRECTION

1. a. Déterminons les valeurs exactes de p_1 et p_2 et interprétons:

D'après l'énoncé:
- $p_{n+1} = 0,7\ p_n^2 + 0,3$
- $p_0 = 0,3$
- $n \in \mathbb{N}$.

Dans ces conditions:
- $p_1 = 0,7 \times p_0^2 + 0,3$

  $= 0,7 \times (0,3)^2 + 0,3$

  $= 0,363$.
- $p_2 = 0,7 \times p_1^2 + 0,3$

  $= 0,7 \times (0,363)^2 + 0,3$

  $\approx 0,3922$.

Ainsi:
- la probabilité d'obtenir au plus 1 descendance est de 36,3%
- la probabilité d'obtenir au plus 2 descendances est d'environ 39,22%.

1. b. Calculons la probabilité d'obtenir au moins 11 générations de bactéries:

La probabilité q d'obtenir au moins 11 générations de bactéries est égale à:

$$q = 1 - p_{10}.$$

Or d'après le tableau: $p_{10} = 0,42802018$.

Ainsi, à 10^{-3} près: $q = 0,572$.

1. c. Formulons des conjectures sur les variations et la convergence de la suite (p_n):

D'après le tableau, la suite (p_n) semble:
- être croissante
- être majorée par $M = 0,5$
- converger vers $\ell = 0,5$.

2. a. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$:

Ici:
- $p_{n+1} = 0,7\, p_n^2 + 0,3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
- $p_0 = 0,3$ et $p_1 = 0,363$.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$ ".

Initialisation: $0 \leqslant p_0 \leqslant p_1 \leqslant 0,5$?

$p_0 = 0,3$ et $p_1 = 0,363$

Nous avons donc bien: $0 \leqslant p_0 \leqslant p_1 \leqslant 0,5$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$ et montrons qu'alors $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,5$.

Supposons: $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

D'où: (1) $\Rightarrow 0^2 \leqslant p_n^2 \leqslant p_{n+1}^2 \leqslant 0,25$

$\Rightarrow 0,7 \times 0^2 \leqslant 0,7\, p_n^2 \leqslant 0,7\, p_{n+1}^2 \leqslant 0,7 \times 0,25$

$\Rightarrow 0,3 \leqslant 0,7\, p_n^2 + 0,3 \leqslant 0,7\, p_{n+1}^2 + 0,3 \leqslant 0,7 \times 0,25 + 0,3$

$\Rightarrow 0,3 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,475$

$\Rightarrow 0 \leqslant 0,3 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,475 \leqslant 0,5$

$\Rightarrow 0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_{n+2} \leqslant 0,5$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5$.

2. b. Justifions que la suite (p_n) est convergente:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$0 \leqslant p_n \leqslant p_{n+1} \leqslant 0,5 \iff \begin{cases} p_n \leqslant p_{n+1} \\ p_n \leqslant 0,5 \end{cases} \iff \begin{cases} (p_n) \text{ est croissante} \\ (p_n) \text{ est majorée par } M = 0,5 \end{cases}.$$

Or, d'après le cours, toute suite croissante et majorée est convergente.

Donc ici: la suite (p_n) est convergente et converge vers " ℓ ".

3. a. Justifions que ℓ est solution de $0,7\,\ell^2 - \ell + 0,3 = 0$:

Comme la suite (p_n) est convergente, elle admet une limite ℓ telle que:

$$\ell = 0,7 \times \ell^2 + 0,3.$$

$\ell = 0,7 \times \ell^2 + 0,3 \iff 0,7\,\ell^2 - \ell + 0,3 = 0.$

Ainsi " ℓ " est bien solution de l'équation: $0,7\,\ell^2 - \ell + 0,3 = 0.$

3. b. Déterminons alors ℓ:

En résolvant l'équation: $0,7\,\ell^2 - \ell + 0,3 = 0$, via le calcul de Δ, on trouve:

- $\ell_1 = 1 > 0,5$, donc à rejeter
- $\ell_2 = \dfrac{3}{7} \leqslant 0,5$, donc à retenir.

Ainsi la suite (p_n) converge vers: $\ell = \dfrac{3}{7}$.

4. Complétons les lignes 2, 4 et 5 de la fonction écrite en Python:

Le script Python complété est le suivant:

```
1  def suite(n) :
2    p = 0.3
3    s = [p]
4    for i in range (n - 1)
5        p = 0.3+0.7*p**2
6        s.append(p)
7    return (s)
```