www.freemaths.fr

BACCALAURÉAT
MATHÉMATIQUES

SUJET 1

CORRIGÉ EXERCICE 2

ASIE
2022

$$f(t) = 2,5 - 1,5\, e^{-0,2t}$$

CORRECTION

PARTIE A

1. Calculons la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure:

Cela revient à calculer: U_1.

Ici: • $U_{n+1} = f(U_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• $U_0 = 1$.

De plus: " toutes les 30 minutes, l'organisme du patient élimine 10% de la quantité de médicament présente dans le sang **et** reçoit une dose supplémentaire de 0, 25 mg de la substance médicamenteuse ".

Dans ces conditions: $U_1 = U_0 - 10\%\, U_0 + 0,25$

$= 1 - (10\% \times 1) + 0,25$

cad $U_1 = 1,15$ mg.

Ainsi, la quantité de médicament dans le sang au bout d'une demi-heure est de: 1, 15 mg.

2. Justifions que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 0,9\ U_n + 0,25$:

- D'après l'énoncé: " une première injection de **1 mg** ".

D'où: $U_0 = 1$ mg.

- De plus, toutes les 30 minutes:
  - l'organisme élimine **10%** de la quantité de médicament,
  - **et**, il reçoit une dose supplémentaire de **0, 25 mg** de la substance médicamenteuse.

Soient: • U_{n+1}, la quantité (en mg) de médicament dans le sang du patient au bout de $(n+1)$ périodes de trente minutes,

• U_n, la quantité (en mg) de médicament dans le sang du patient au bout de n périodes de trente minutes.

Pour tout entier naturel n, la quantité de médicament dans le sang au bout de $(n+1)$ périodes de trente minutes est égale à celle au bout de n périodes de trente minutes diminuée de **10%** **et** augmentée d'une nouvelle dose de **0, 25 mg**.

Pour tout entier naturel n:

$U_{n+1} = U_n - 10\%\ U_n + 0,25$ **cad** $U_{n+1} = 0,9\,U_n + 0,25$.

Au total, pour tout entier naturel n: $U_{n+1} = 0,9\,U_n + 0,25$.

3. a. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leqslant U_{n+1} < 5$:

Ici: • $U_{n+1} = 0,9\ U_n + 0,25$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

• $U_0 = 1$ mg

- $U_1 = 1,15$ mg.

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $U_n \leqslant U_{n+1} < 5$ ".

Initialisation: $U_0 \leqslant U_1 < 5$?

Comme $0 \leqslant 1,15 < 5$, nous avons bien: $U_0 \leqslant U_1 < 5$.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Supposons que pour un certain entier naturel n, $U_n \leqslant U_{n+1} < 5$ et montrons qu'alors $U_{n+1} \leqslant U_{n+2} < 5$.

Supposons: $U_n \leqslant U_{n+1} < 5$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

(1) $\Rightarrow 0,9\,U_n \leqslant 0,9\,U_{n+1} < 0,9 \times 5$

$\Rightarrow 0,9\,U_n \leqslant 0,9\,U_{n+1} < 4,5$

$\Rightarrow 0,9\,U_n + 0,25 \leqslant 0,9\,U_{n+1} + 0,25 < 4,5 + 0,25$

$\Rightarrow U_{n+1} \leqslant U_{n+2} < 4,75$

$\Rightarrow U_{n+1} \leqslant U_{n+2} < 5$.

Conclusion: Pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant U_{n+1} < 5$.

3. b. Déduisons-en que la suite (U_n) est convergente:

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n:

$$U_n \leq U_{n+1} < 5 \iff \begin{cases} U_n \leq U_{n+1} \\ U_n < 5 \end{cases} \iff \begin{cases} (U_n) \text{ est croissante sur } \mathbb{N} \\ (U_n) \text{ est strictement majorée par } M = 5 \end{cases}$$

Or d'après le cours, toute suite croissante et majorée est **convergente**.

Donc ici: la suite (U_n) est convergente et converge vers " ℓ ".

4. a. Recopions et complétons le script écrit en Python:

```
def efficace ( ):
u = 1
n = 0
    while u < 1, 8 :
        u = 0, 9 * u + 0, 25
        n = n + 1
    return n
```

4. b. Déterminons la valeur renvoyée par ce script et interprétons:

Le script renvoie la valeur: $n = 8$ car $U_8 \approx 1,854 > 1,8$.

Cela signifie que le médicament est vraiment efficace après un nombre d'heures égal à 8 x 30 minutes = 4 heures.

5. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison 0, 9:

Ici: $V_n = 2,5 - U_n \iff V_{n+1} = 2,5 - U_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\iff V_{n+1} = 2,5 - (0,9\,U_n + 0,25)$ (1).

Or: $V_0 = 2,5 - U_0$ cad $V_0 = 2,5 - 1 = 1,5$ et $U_n = 2,5 - V_n$.

D'où: (1) $\iff V_{n+1} = 2,5 - (0,9 \times [2,5 - V_n] + 0,25)$

$= 0,9\,V_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $V_0 = 1,5$.

5. b. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$:

- Comme $V_{n+1} = 0,9\,V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times (0,9)^n$ cad $V_n = 1,5 \times (0,9)^n$.

- Comme $V_n = 1,5 \times (0,9)^n$ et $U_n = 2,5 - V_n$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 2,5 - (1,5 \times (0,9)^n)$ cad $U_n = 2,5 - 1,5 \times 0,9^n$.

5. c. Le traitement présente-t-il un risque pour le patient ?

Le médicament est toxique à partir du moment où la quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg cad $U_n > 3$ mg.

Or: $U_n > 3$ mg $\iff 2,5 - 1,5 \times 0,9^n > 3$

$\iff 1,5 \times 0,9^n < -0,5$ ce qui est impossible.

Dans ces conditions: il est impossible que la quantité présente dans le sang du patient dépasse 3 mg.

Donc AUCUN risque pour le patient.

PARTIE B

1. **Le médicament est-il réellement efficace au bout de 3h 45mn ?**

Le médicament est efficace ssi: $f(t) \geqslant 1,8$ mg. (et: $f(t) < 3$ mg)

Pour répondre à la question, nous devons calculer: $f(3h\ 45) = f(3,75)$.

$f(3,75) = 2,5 - 1,5\, e^{-0,2t}$ car $f(t) = 2,5 - 1,5\, e^{-0,2t}$

$= 1,791$.

Comme $1,791 < 1,8$: le médicament n'est pas efficace au bout de 3h 45mn.

2. **Déterminons alors le temps nécessaire pour qu'il devienne efficace:**

Comme déjà dit, le médicament est efficace à partir du moment où:

$f(t) \geqslant 1,8$ mg, avec $f(t) < 3$ mg.

$f(t) \geqslant 1,8 \iff 2,5 - 1,5\, e^{-0,2t} \geqslant 1,8$

$\iff 1,5\, e^{-0,2t} \leqslant 0,7$

$\iff e^{-0,2t} \leqslant \dfrac{0,7}{1,5}$

$\iff -0,2t \leqslant \ln\left(\dfrac{0,7}{1,5}\right)$

$\iff 0,2t \geqslant 0,7621$

cad $t \geqslant 3,81$ heures soit $t \geqslant 3$ heures 49 minutes.

Ainsi le médicament deviendra efficace à partir de:

3 heures et 49 minutes.

3. Comparons les résultats:

Dans le modèle discret, il faut **4 heures** pour que le médicament devienne efficace.

Dans le modèle continu, il faut **3 heures 49 minutes** pour que le médicament devienne efficace.

Nous choisirons donc le modèle continu: le médicament est plus rapidement efficace.