T^LE
Technologique Mathématiques

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

VOITURES À LOUER

CORRECTION

1. Déterminons le nombre de voitures louées en février 2019 :

D'après l'énoncé, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = 0,9\ U_n + 42 \ \text{ et } \ U_0 = 280 \text{ voitures.}$$

Ici, il s'agit de calculer U_1, car février = 1 mois après janvier.

$U_1 = 0,9 \times U_0 + 42 \iff U_1 = 294$ voitures.

Ainsi, le nombre de voitures louées en février 2019 est de : 294.

2. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison q et de premier terme V_0 que l'on précisera :

$V_n = U_n - 420 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 420$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\iff V_{n+1} = (0,9\ U_n + 42) - 420 \quad (1).$

Or : $V_0 = U_0 - 420 \Rightarrow V_0 = 280 - 420 = -140$ et $U_n = V_n + 420$.

Alors : $(1) \iff V_{n+1} = (0,9\,[\,V_n + 420\,] + 42) - 420$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,9\ V_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $V_0 = -140$.

2. b. b1. Pour tout entier naturel n, exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,9\ V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 \times (0,9)^n$ cad: $V_n = -140 \times (0,9)^n$.

2. b. b2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrons que $U_n = -140 \times (0,9)^n + 420$:

Nous savons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

* $V_n = -140 \times (0,9)^n$
* $U_n = V_n + 420$.

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = -140 \times (0,9)^n + 420$.

3. Déterminons la limite de la suite (U_n) et interprétons le résultat:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} -140 \times (0,9)^n + 420$$

$= 420$ voitures car: $\lim_{n \to +\infty} (0,9)^n = 0$, car: $0,9 \in]0;1[$.

Ainsi: $\lim_{n \to +\infty} U_n = 420$ voitures.

Cela signifie, qu'au bout de n mois (" n " très grand), le nombre de voitures louées se stabilisera autour de 420.

4. a. Recopions et complétons l'algorithme:

L'algorithme recopié et complété est le suivant:

$N \leftarrow 0$

$U \leftarrow 280$

Tant que $U \leqslant 380$

| $N \leftarrow N + 1$

| $U \leftarrow 0,9 \times U + 42$

Fin Tant que

4. b. Que contient la variable N à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $U_{11} \approx 376,1$ et $U_{12} \approx 380,5$.

Ainsi, la variable N à la fin de l'exécution de l'algorithme contient la valeur: $N = 12$.

4. c. Déduisons-en le mois durant lequel la commune devra augmenter le nombre de voitures:

12 mois après janvier 2019, la commune devra augmenter le nombre de voitures.

En d'autres termes, c'est en janvier 2020 que la commune devra augmenter le nombre de voitures.

5. Résolvons dans $\mathbb{N}$, $-140 \times (0,9)^n + 420 > 380$ et interprétons:

Nous allons déterminer " n " $\in \mathbb{N}$ tel que: $-140 \times (0,9)^n + 420 > 380$.

$$-140 \times (0,9)^n + 420 > 380 \iff (0,9)^n < \frac{4}{14}$$

$$\iff n \cdot \ln(0,9) < \ln\left(\frac{2}{7}\right)$$

$$\iff n > \frac{\ln\left(\frac{2}{7}\right)}{\ln(0,9)}, \text{ car: } \quad 0,9 \in \,]0;1[$$

$$\Rightarrow n > 12 \text{ mois, car } n \text{ est un entier naturel.}$$

En conclusion: cela confirme bien le fait que 12 mois après janvier 2019, la commune devra augmenter le nombre de voitures. Donc en janvier 2020.