www.freemaths.fr

T^LE Technologique Mathématiques

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

VÉLOS À LOUER

CORRECTION

1. a. Déterminons le nombre de vélos dans le stock au 1er juillet 2019 :

D'après l'énoncé : $U_0 = 150$ vélos au 1er juillet 2018.

Ici, il s'agit de calculer U_1, car 1er juillet 2019 = 1 an après 1er juillet 2018.

$U_1 = 150 - 20\% \times 150 + 35 \iff U_1 = 150 \times (1 - 20\%) + 35 \iff U_1 = 155$ vélos.

Ainsi, le nombre de vélos dans le stock au 1er juillet 2019 est de : 155.

1. b. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,8\ U_n + 35$:

- D'après l'énoncé, le nombre de vélos dans le stock au 1er juillet 2019 est de 150.

D'où : $U_0 = 150$ vélos.

- De plus, chaque année, le loueur de vélos :
  - se sépare de 20% de son stock,
  - et, achète ensuite 35 nouveaux vélos.

Soient :
- U_{n+1}, le nombre de vélos présents dans le stock au 1er juillet de l'année 2018 + (n + 1),
- U_n, le nombre de vélos présents dans le stock au 1er juillet de l'année 2018 + (n).

Pour tout entier naturel n, le nombre de vélos présents dans le stock au 1er juillet de l'année 2018 + (n + 1) est égal à celui U_n diminué de 20% et augmenté de 35 nouveaux vélos.

Pour tout entier naturel n:

$$U_{n+1} = U_n - 20\%\ U_n + 35 \quad \text{cad:} \quad U_{n+1} = 0,8\ U_n + 35.$$

Au total, nous avons bien: $U_{n+1} = 0,8\ U_n + 35$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a. Déterminons la formule demandée:

La formule à entrer dans la cellule B_3 est:

- En B_3: on entre << = 0, 8 * B_2 + 35 >>.

2. b. Conjecturons la limite de la suite (U_n):

A la vue du tableau, nous pouvons conjecturer que: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 175$.

3. a. Montrons que la suite (V_n) est géométrique de raison q et de premier terme V_0 que l'on précisera:

$V_n = U_n - 175 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 175$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$\iff V_{n+1} = (0,8\ U_n + 35) - 175 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 175 \Rightarrow V_0 = 150 - 175 = -25$ et $U_n = V_n + 175$.

Alors: $(1) \iff V_{n+1} = (0,8\,[\,V_n + 175\,] + 35) - 175$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,8\ V_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $V_0 = -25$. ($V_n = -25 \times (0,8)^n$)

3. b. Déduisons-en que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = -25 \times (0,8)^n + 175$:

Nous savons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: * $V_n = -25 \times (0,8)^n$

* $U_n = V_n + 175$.

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = -25 \times (0,8)^n + 175$.

3. c. Déterminons la limite de la suite (U_n) en $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} -25 \times (0,8)^n + 175$$

$= 175$ **vélos** car: $\lim_{n \to +\infty} (0,8)^n = 0$, car: $0,8 \in]0;1[$.

Ainsi: $\lim_{n \to +\infty} U_n = 175$ vélos.

Cela signifie, qu'au bout de n années (" n " très grand), le nombre de vélos présents dans le stock se stabilisera autour de 175.

4. Résolvons dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $U_n \geq 170$ et interprétons:

Nous allons déterminer " **n** " $\in \mathbb{N}$ tel que: $U_n \geq 170$.

$U_n \geq 170 \iff -25 \times (0,8)^n + 175 \geq 170$

$\iff n \cdot \ln(0,8) \leq -\ln(5)$

$\iff n \geq \dfrac{-\ln(5)}{\ln(0,8)}$, car: $0,8 \in]0;1[$

$\Rightarrow n \geq 8$ ans, car n est un entier naturel.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 170$ ssi: $n \geq 8$ ans.

Cela signifie que 8 ans après le 1er juillet 2018, le nombre de vélos présents dans le stock dépassera les 170 unités.

Et plus exactement, à partir du: 1er juillet 2026.