T^{LE} Technologique Mathématiques

Suites arithmético-géométriques

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

LA POPULATION DE SINGES

ÉNONCÉ

Dans une réserve naturelle, on étudie l'évolution de la population d'une race de singes en voie d'extinction à cause d'une maladie.

Partie A

Une étude sur cette population de singes a montré que leur nombre baisse de 15% chaque année.

Au 1er janvier 2004, la population était estimée à 25000 singes.

À l'aide d'une suite, on modélise la population au 1er janvier de chaque année.

Pour tout entier naturel n, le terme U_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année 2004 + n.

On a ainsi: $U_0 = 25000$.

1. Calculer l'effectif de cette population de singes:

   a. au 1er janvier 2005,

   b. au 1er janvier 2006, en arrondissant à l'entier.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a: $U_n = 25000 \times 0,85^n$.

3. Suivant ce modèle, on souhaite savoir, à l'aide d'un algorithme, au bout de combien d'années après le 1er janvier 2004 le nombre de singes sera inférieur à 5 000.

Recopier et compléter les lignes L4, L5 et L6 de l'algorithme ci-dessous.

L1:	Variables	U un réel, n un entier
L2:	Initialisation	U prend la valeur 25 000
L3:		n prend la valeur 0
L4:	Traitement	Tant que ... ... faire
L5:		U prend la valeur ... ...
L6:		n prend la valeur ... ...
L7:		Fin Tant que
L8:	Sortie	Afficher n

4. Montrer que la valeur de n affichée après l'exécution de l'algorithme est 10.

Partie B

Au 1er janvier 2014, une nouvelle étude a montré que la population de cette race de singes, dans la réserve naturelle, ne comptait plus que 5 000 individus.

La maladie prenant de l'ampleur, on met en place un programme de soutien pour augmenter le nombre de naissances. À partir de cette date, on estime que, chaque année, un quart des singes disparaît et qu'il se produit 400 naissances.

On modélise la population de singes dans la réserve naturelle à l'aide d'une nouvelle suite. Pour tout entier naturel n, le terme V_n de la suite représente le nombre de singes au 1er janvier de l'année $2014 + n$.

On a ainsi: $V_0 = 5000$.

1. a. Calculer V_1 et V_2.

b. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $V_{n+1} = 0,75 \times V_n + 400$.

2. On considère la suite (W_n) définie pour tout entier naturel n par : $W_n = V_n - 1600$.

a. Montrer que (W_n) est une suite géométrique de raison 0, 75. Préciser la valeur de W_0.

b. Pour tout entier naturel n, exprimer W_n en fonction de n.

c. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $V_n = 1600 + 3\,400 \times 0,75^n$.

d. Calculer la limite de la suite (V_n) et interpréter ce résultat.