

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

**Suites
arithmético-géométriques**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA POPULATION DE SINGES

CORRECTION

Partie A: Étude I sur les singes

1. a. Calculons l'effectif de cette population de singes au 1^{er} janvier 2005:

Il s'agit de calculer U_1 .

$$U_1 = (1 - 15\%) U_0 \Leftrightarrow U_1 = 0,85 \times 25\,000$$
$$\Rightarrow U_1 = 21\,250 \text{ singes.}$$

Ainsi, au 1^{er} janvier 2005, il y aura: 21 250 singes.

1. b. Calculons l'effectif de cette population de singes au 1^{er} janvier 2006:

Il s'agit de calculer U_2 .

$$U_2 = (1 - 15\%) U_1 \Leftrightarrow U_2 = 0,85 \times 21\,250$$
$$\Rightarrow U_2 = 18\,063 \text{ singes.}$$

Ainsi, au 1^{er} janvier 2006, il y aura: 18 063 singes.

2. Justifions que, pour tout entier naturel n , $U_n = 25\,000 \times (0,85)^n$:

• D'après l'énoncé, au 1^{er} janvier 2004, la population de singes est de: 25 000.

D'où: $U_0 = 25\,000$.

• De plus, chaque année leur nombre baisse de 15%.

Ainsi, pour tout entier naturel n , le nombre " U_{n+1} " de singes est égal au nombre " U_n " de singes diminué de 15%.

Donc pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n - 15\% U_n \Leftrightarrow U_{n+1} = 0,85 U_n$$

Ou encore: $U_n = U_0 \times (0,85)^n \Rightarrow U_n = 25000 \times (0,85)^n$.

Nous sommes donc en présence d'une suite géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $U_0 = 25000$.

3. Recopions et complétons les lignes L_4 , L_5 et L_6 :

Les lignes L_4 , L_5 et L_6 complétées sont les suivantes:

- L_4 : Traitement Tant que $u \geq 5000$ faire
- L_5 : u prend la valeur $u \times 0,85$
- L_6 : n prend la valeur $n + 1$

4. Montrons que la valeur de n est 10:

Au bout de combien d'années, après le 1^{er} janvier 2004, le nombre de singes sera-t-il inférieur à 5000 ?

Répondre à cette question revient à résoudre l'inéquation: $U_n \leq 5000$.

$$U_n \leq 5000 \Leftrightarrow 25000 \times (0,85)^n \leq 5000$$

$$\Leftrightarrow (0,85)^n \leq 0,2$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln(0,85) \leq \ln(0,2)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,85)} \quad \text{car: } 0,85 \in]0, 1[, \text{ et donc: } \ln(0,85) < 0$$

$$\Rightarrow n \geq 9,903.$$

Nous prendrons $n = 10$ ans car n est un entier naturel.

Cela signifie qu'à partir de 2014, cad 10 ans à compter du 1^{er} janvier 2004, le nombre de singes sera inférieur à 5000.

Partie B: Étude II sur les singes

I. a. Calculons V_1 et V_2 :

$$\begin{aligned} \bullet V_1 &= (1 - 25\%) V_0 + 400 \iff V_1 = 0,75 \times 5000 + 400 \\ &\Rightarrow V_1 = 4\,150 \text{ singes.} \end{aligned}$$

Ainsi, au 1^{er} janvier 2015, il y aura: 4 150 singes.

$$\begin{aligned} \bullet V_2 &= (1 - 25\%) V_1 + 400 \iff V_2 = 0,75 \times 4\,150 + 400 \\ &\Rightarrow V_2 = 3\,513 \text{ singes.} \end{aligned}$$

Ainsi, au 1^{er} janvier 2016, il y aura: 3 513 singes.

I. b. Justifions que, pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = 0,75 V_n + 400$:

• D'après l'énoncé, au 1^{er} janvier 2014, la population de singes est de: 5000.

D'où: $V_0 = 5000$.

• De plus, chaque année leur nombre baisse de 25% et il se produit 400 nouvelles naissances.

Soient: • V_{n+1} , le nombre de singes au 1^{er} janvier (2014 + (n + 1)),
• V_n , le nombre de singes au 1^{er} janvier (2014 + (n)).

Pour tout entier naturel n , le nombre V_{n+1} de singes est égal au nombre V_n de singes diminué de 25% et augmenté de 400 " nouvelles naissances ".

Donc pour tout entier naturel n :

$$V_{n+1} = V_n - 25\% V_n + 400 \iff V_{n+1} = 0,75 V_n + 400.$$

2. a. Montrons que (W_n) est géométrique et déterminons W_0 et q :

$$\begin{aligned} W_n = V_n - 1600 &\Leftrightarrow W_{n+1} = V_{n+1} - 1600 \\ &\Leftrightarrow W_{n+1} = (0,75V_n + 400) - 1600 \quad (1). \end{aligned}$$

Or: $W_0 = V_0 - 1600 \Rightarrow W_0 = 3400$ et $V_n = W_n + 1600$.

Ainsi: $(1) \Leftrightarrow W_{n+1} = (0,75[W_n + 1600] + 400) - 1600$
 $\Rightarrow W_{n+1} = 0,75W_n$.

Par conséquent, (W_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $W_0 = 3400$.

2. b. Exprimons W_n en fonction de n :

Comme $W_{n+1} = 0,75W_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$W_n = W_0 \times (0,75)^n, \text{ avec: } W_0 = 3400.$$

2. c. Déduisons-en que pour tout entier naturel n , $V_n = 1600 + 3400 \times (0,75)^n$:

Nous savons que: * $W_n = 3400 \times (0,75)^n$

* $V_n = W_n + 1600$.

D'où: $V_n = 1600 + 3400 \times (0,75)^n$.

2. d. Calculons la limite de (V_n) et interprétons:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1600 + 3400 \times (0,75)^n$$

$$= 1600 \text{ car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,75)^n = 0, \text{ car: } 0,75 \in]-1, 1[.$$

Donc: • La suite (V_n) est convergente et converge vers 1600.

- Au bout de n années (" n " très grand), la population de singes tendra vers 1600 individus.