

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

**Suites
arithmético-géométriques**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. a. Donnons la nature des suites (U_n) et (V_n) :

- La suite (U_n) est arithmétique de raison $r = 0,4$ et de premier terme $U_0 = 10$.
- La suite (V_n) est géométrique de raison $q = 1,028$ et de premier terme $V_0 = 8$.

1. b. Exprimons U_n et V_n en fonction de l'entier naturel n :

D'après le cours, quand pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = U_n + r$ et $V_{n+1} = q \cdot V_n$,

nous pouvons alors écrire: $U_n = U_0 + n \cdot r$ et $V_n = V_0 \cdot q^n$.

Donc ici, les expressions de U_n et V_n en fonction de l'entier naturel n sont:

$$U_n = 10 + 0,4 \cdot n \text{ et } V_n = 8 \cdot (1,028)^n, n \in \mathbb{N}.$$

Au total, nous avons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = 10 + 0,4 \cdot n$ et $V_n = 8 \cdot (1,028)^n$.

2. Interprétons le résultat obtenu:

En sortie de l'algorithme, "n" a pour valeur: $n = 46$.

Cela signifie que: c'est à partir de $n = 46$ que V_n dépassera enfin U_n .

Donc quand $n \geq 46$: $V_n \geq U_n, n \in \mathbb{N}$.

3. a. Déterminons la population de l'Angleterre en 1810:

La population, en millions d'habitants, de l'Angleterre en 1810 était d'environ:

$$V_{10} = 8 \times (1,028)^{10} \text{ cad: } V_{10} \approx 10,544 \text{ millions d'habitants.}$$

3. b. Déterminons à partir de quelle année la population de l'Angleterre aurait dépassé 16 millions d'habitants:

Pour répondre à cette question, nous allons déterminer ' n ' tel que:

$$V_n \geq 16. \quad (16 = 16 \text{ millions d'habitants})$$

$$V_n \geq 16 \Leftrightarrow 8 \times (1,028)^n \geq 16$$

$$\Leftrightarrow n \cdot \ln(1,028) \geq \ln(2)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(2)}{\ln(1,028)}$$

$$\Rightarrow n \geq 26, \text{ car } n \text{ est un entier naturel.}$$

Ainsi, la population d'Angleterre aurait dépassé 16 millions d'habitants:

$$\text{en } 1800 + 26 \text{ cad: en } 1826.$$

3. c. Déterminons l'année à partir de laquelle l'agriculture serait devenue insuffisante:

Le problème serait intervenu à partir du moment où: $U_n < V_n$.

Or, grâce à la question 2., nous savons que V_n dépasse U_n quand $n = 46$.

Au total, l'agriculture serait devenue insuffisante pour nourrir la population d'Angleterre en $1800 + 46$ cad: en 1846.