

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

**TLE**

# Technologique Mathématiques

**Suites  
arithmético-géométriques**



**CORRIGÉ DE L'EXERCICE**

# LE JARDINIER FURIEUX !

## CORRECTION

1. Déterminons la superficie de terrain envahi par cette plante au 1<sup>er</sup> janvier 2018:

Il s'agit de calculer  $U_1$ .

$$U_1 = (1 - 10\%) U_0 + 4 \Leftrightarrow U_1 = 0,9 \times 120 + 4$$

$$\Rightarrow U_1 = 122 \text{ m}^2.$$

Ainsi, la superficie (en  $\text{m}^2$ ) de terrain envahi par cette plante au 1<sup>er</sup> janvier 2018 est de: 122.

2. Recopions et complétons les lignes  $L_1$ ,  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_7$  de cet algorithme:

Les lignes  $L_1$ ,  $L_3$ ,  $L_4$  et  $L_7$  complétées sont les suivantes:

- |           |  |
|-----------|--|
| • $L_1$ : | $U$ prend la valeur 120                |
| • $L_3$ : | Tant que $U > 60$                      |
| • $L_4$ : | $U$ prend la valeur $0,9 \times U + 4$ |
| • $L_7$ : | Afficher $2017 + N$                    |

3. a. Montrons que  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $q = 0,9$  et déterminons  $V_0$ :

$$V_n = U_n - 40 \Leftrightarrow V_{n+1} = U_{n+1} - 40$$

$$\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,9 U_n + 4) - 40 \quad (1).$$

Or:  $V_0 = U_0 - 40 \Rightarrow V_0 = 80$  et  $U_n = V_n + 40$ .

Ainsi: (I)  $\Leftrightarrow V_{n+1} = (0,9 [V_n + 40] + 4) - 40$   
 $\Rightarrow V_{n+1} = 0,9 V_n$ .

Par conséquent,  $(V_n)$  est bien une suite géométrique de raison  $q = 0,9$  et de premier terme  $V_0 = 80$ .

3. b. Exprimons  $V_n$  en fonction de  $n$ , pour tout entier naturel  $n$ :

Comme  $V_{n+1} = 0,9 V_n$ , d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 (0,9)^n, \text{ avec: } V_0 = 80.$$

3. c. Justifions que  $U_n = 80 \times 0,9^n + 40$ , pour tout entier naturel  $n$ :

Nous savons que: \*  $V_n = 80 \times (0,9)^n$

\*  $U_n = V_n + 40$ .

D'où:  $U_n = 80 \times 0,9^n + 40$ .

4. a. Résolvons l'inéquation  $80 \times 0,9^n + 40 \leq 60$ :

Il s'agit de déterminer "  $n$  " tel que:  $U_n \leq 60$ .

$$U_n \leq 60 \Leftrightarrow 80 \times 0,9^n + 40 \leq 60$$

$$\Leftrightarrow 80 \times 0,9^n \leq 20$$

$$\Leftrightarrow (0,9)^n \leq 0,25$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,9) \leq \ln(0,25)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,25)}{\ln(0,9)}, \text{ car: } 0,9 \in ]0,1[, \text{ et donc: } \ln(0,9) < 0$$

$$\Rightarrow n \geq 13,157$$

$\Rightarrow n \geq 14$  car  $n$  est un entier naturel.

Ainsi, 14 ans après le 1<sup>er</sup> janvier 2017, la superficie de terrain en  $m^2$  envahi par la Renouée du Japon sera inférieure à  $60 m^2$ .

En d'autres termes, à partir de 2031, la superficie de terrain en  $m^2$  envahi par la Renouée du Japon sera inférieure à  $60 m^2$ .

4. b. Déduisons-en l'année à partir de laquelle la superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1<sup>er</sup> janvier 2017:

La superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1<sup>er</sup> janvier 2017 ssi :  $U_n \leq \frac{120}{2}$ .

Cela revient à déterminer " $n$ " tel que:  $U_n \leq 60$ .

Or, à la question précédente, nous avons vu que dans ce cas:  $n = 14$ .

Au total, l'année demandée est donc:  $2017 + "14"$  cad 2031.

5. Le jardinier arrivera-t-il à faire disparaître complètement la plante de son terrain ?

Pour répondre à cette question, nous devons calculer:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 80 \times (0,9)^n + 40$$

$$= 40 \quad \text{car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,9)^n = 0, \quad \text{car: } 0,9 \in ]0, 1[.$$

La suite  $(U_n)$  est donc convergente et converge vers  $40 m^2$ .

Cela signifie qu'au bout de  $n$  années (" $n$ " très grand) la superficie envahie par la plante sera au minimum de  $40 m^2$ .

Donc non, le jardinier n'y arrivera pas.