T^LE Technologique Mathématiques

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA PISCINE D'ALICE

CORRECTION

1. Calculons U_1 et U_2:

- Il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = (1 - 4\%)\ U_0 + 2 \iff U_1 = 0,96 \times 75 + 2$

$\Rightarrow U_1 = 74\ m^3.$

Ainsi, le volume d'eau dans la piscine (en m^3), 1 jour après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage est de: 74.

- Il s'agit de calculer U_2.

$U_2 = (1 - 4\%)\ U_1 + 2 \iff U_2 = 0,96 \times 74 + 2$

$\Rightarrow U_2 = 73,04\ m^3.$

Ainsi, le volume d'eau dans la piscine (en m^3), 2 jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage est de: 73, 04.

2. a. Justifions que la suite (U_n) n'est pas arithmétique:

D'après le cours, nous savons que (U_n) est une suite arithmétique ssi:

$$U_1 - U_0 = U_2 - U_1 = U_3 - U_2 = \dots$$

Or ici: $U_1 - U_0 = -1$ et $U_2 - U_1 = -0,96.$

Donc: $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ car $-1 \neq -0,96.$

Ainsi: (U_n) n'est pas une suite arithmétique.

2. b. La suite (U_n) est-elle géométrique ?

D'après le cours, nous savons que (U_n) est une suite géométrique ssi:

$$\frac{U_1}{U_0} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} = \ldots$$

Or ici: $\frac{U_1}{U_0} = 0,9866$ et $\frac{U_2}{U_1} = 0,9870.$

Donc: $\frac{U_1}{U_0} \neq \frac{U_2}{U_1}$ car $0,9866 \neq 0,9870.$

Ainsi: (U_n) n'est pas une suite géométrique.

3. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,96 \times U_n + 2$:

- D'après l'énoncé, le premier jour de la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage, la piscine contient 75 m^3.

D'où: $U_0 = 75\ m^3$.

- De plus, chaque jour, il y a une évaporation de 4% et la piscine se remplie automatiquement avec un apport de 2 m^3 d'eau.

Soient:
- U_{n+1}, le volume d'eau dans la piscine (en m^3), (n+1) jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage,
- U_n, le volume d'eau dans la piscine (en m^3), (n) jours après la mise en fonctionnement du système automatique de remplissage.

Pour tout entier n, le volume d'eau U_{n+1} est égal au volume d'eau U_n diminué de 4% et augmenté de 2 m^3.

Donc pour tout entier naturel n:

$U_{n+1} = U_n - 4\%\ U_n + 2 \iff U_{n+1} = 0,96\ U_n + 2.$

4. a. Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison 0,96 et déterminons V_0:

$V_n = U_n - 50 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 50$

$\iff V_{n+1} = (0,96\, U_n + 2) - 50 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 50 \Rightarrow V_0 = 25$ et $U_n = V_n + 50.$

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,96\,[V_n + 50] + 2) - 50$

$\Rightarrow V_{n+1} = 0,96\, V_n.$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,96$ et de premier terme $V_0 = 25.$

4. b. Pour tout entier naturel n, exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,96\, V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$V_n = V_0 \times (0,96)^n$, avec: $V_0 = 25.$

4. c. Déduisons-en que, pour tout entier naturel n, $U_n = 25 \times 0,96^n + 50$:

Nous savons que: * $V_n = 25 \times (0,96)^n$

* $U_n = V_n + 50.$

D'où: $U_n = 25 \times 0,96^n + 50.$

4. d. Déterminons la limite de la suite (U_n) et interprétons le résultat obtenu:

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 25 \times (0,96)^n + 50$

$= 50$ car: $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,96)^n = 0$, car: $0,96 \in \,]\,0, 1\,[.$

La suite (U_n) est donc convergente et converge vers 50 m^3.

Cela signifie qu'au bout de n années (" n " très grand), la piscine ne contiendra plus que 50 m^3 d'eau.

5. a. Recopions et complétons les lignes L_5 et L_6 de cet algorithme:

Les lignes L_5 et L_6 complétées sont les suivantes:

- L_5: Tant que $U \geqslant 65$
- L_6: | U prend la valeur $0,96 \times U + 2$

5. b. Déterminons le résultat affiché à la sortie:

Nous avons le tableau suivant:

Valeur de n	0	1	2	...	12	13
Valeur de U	75	74	73, 04		65, 32	64, 70

Nous nous arrêtons à l'étape $n = 13$ car c'est à partir de cette étape que le volume d'eau dans la piscine sera inférieur à 65 m^3.

En effet: $64,70\ m^3 < 65\ m^3$.

Ainsi, la valeur affichée en sortie de cet algorithme est: $n = 13$.

5. c. Déterminons combien de jours le niveau de l'eau est suffisant si on conserve ce réglage:

Il s'agit de déterminer " n " tel que: $U_n < 65$.

$U_n < 65 \iff 25 \times (0,96)^n + 50 < 65$

$\iff 25 \times (0,96)^n < 15$

<=> $(0,96)^n < 0,6$

<=> $n \ln(0,96) < \ln(0,6)$

<=> $n > \frac{\ln(0,6)}{\ln(0,96)}$, car: $0,96 \in]0,1[$, et donc: $\ln(0,96) < 0$

=> $n > 12,513$

=> $n \geqslant 13$ car n est un entier naturel.

Ainsi, en conservant ce réglage, le niveau de l'eau de la piscine est suffisant pendant 13 jours.