T^LE Technologique Mathématiques

Suites arithmético-géométriques

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA MAISON DE CAMPAGNE

CORRECTION

1. Calculons U_1:

Il s'agit de calculer U_1.

$U_1 = (1 - 20\%)\ U_0 + 50 \iff U_1 = 0,8 \times 1500 + 50$

$\Rightarrow U_1 = 1250\ m^2$.

Ainsi, en 2011, la surface engazonnée sera de 1250 m^2 contre 1500 m^2 en 2010.

2. Justifions que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 0,8\ U_n + 50$:

- D'après l'énoncé, Claude dispose d'un terrain de 1500 m^2 entièrement engazonné en 2010.

D'où: $U_0 = 1500$.

- De plus, chaque année 20% de la surface est détruite par la mousse et Claude remplace 50 m^2 de mousse par du gazon.

Soient:
- U_{n+1}, la surface en m^2 de terrain engazonné à l'automne $(2010 + (n + 1))$,
- U_n, la surface en m^2 de terrain engazonné à l'automne $(2010 + (n))$.

Pour tout entier naturel n, la surface en m^2 " U_{n+1} " de terrain engazonné à l'automne est égale à la surface en m^2 " U_n " diminuée de 20% et augmentée de 50 m^2 (" mousse remplacée par du gazon ").

Donc pour tout entier naturel n:

$U_{n+1} = U_n - 20\%\ U_n + 50 \iff U_{n+1} = 0,8\ U_n + 50.$

3. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q:

$V_n = U_n - 250 \iff V_{n+1} = U_{n+1} - 250$

$\iff V_{n+1} = (0,8\ U_n + 50) - 250 \quad (1).$

Or: $V_0 = U_0 - 250 \implies V_0 = 1250$ et $U_n = V_n + 250.$

Ainsi: $(1) \iff V_{n+1} = (0,8\ [V_n + 250] + 50) - 250$

$\implies V_{n+1} = 0,8\ V_n.$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $V_0 = 1250.$

3. b.1. Exprimons V_n en fonction de n:

Comme $V_{n+1} = 0,8\ V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$V_n = V_0 \times (0,8)^n$, avec: $V_0 = 1250.$

3. b.2. Déduisons-en que pour tout entier naturel n, $U_n = 250 + 1250 \times (0,8)^n$:

Nous savons que: * $V_n = 1250 \times (0,8)^n$

* $U_n = V_n + 250.$

D'où: $U_n = 1250 \times (0,8)^n + 250 \quad (a).$

3. c. La surface de terrain engazonné au bout de 4 ans ?

Il s'agit de calculer U_4.

D'après la formule (a): $U_4 = 1250 \times (0,8)^4 + 250,$

cad: $U_4 = 762\ m^2.$

Donc, au bout de 4 ans, la surface de terrain engazonné sera de: $762\ m^2.$

4. a. Déterminons n tel que $U_n < 500$:

$$U_n < 500 \iff 250 + 1250 \times (0,8)^n < 500$$

$$\iff 1250 \times (0,8)^n < 250$$

$$\iff (0,8)^n < 0,2$$

$$\iff n \times \ln(0,8) < \ln(0,2)$$

$$\iff n > \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)}, \quad \text{car: } 0,8 \in]0, 1[, \text{ et donc: } \ln(0,8) < 0$$

$$\Rightarrow n > 7,2.$$

Nous prendrons $n = 8$ ans car n est un entier naturel.

4. b. Interprétation:

Cela signifie qu'après 8 ans, la surface engazonnée sera strictement inférieure à 500 m^2.

5. A-t-il raison ? Justifions notre réponse:

Cela revient à calculer la valeur de U_n quand n tend vers $+\infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} 250 + 1250\,(0,8)^n$$

$$= 250 \quad \text{car: } \lim_{n \to +\infty} (0,8)^n = 0, \quad \text{car: } 0,8 \in]-1, 1[.$$

Donc oui Claude a raison car au bout de " n " années (" n " très grand), il lui restera toujours 250 m^2 de surface engazonnée.