T^LE Technologique Mathématiques

Limite d'une Suite

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

QUANTITÉ CONJUGUÉE 2

CORRECTION

1. Calculons la limite de la suite (U_n) en $+\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n^2+an} - n$$

$$= (+\infty) - (+\infty).$$

Il s'agit d'une forme indéterminée.

Ayons recours **à la technique de la quantité conjuguée** pour contourner cette **indétermination**.

$$U_n = \sqrt{n^2+an} - n \iff U_n = \frac{(\sqrt{n^2+an} - n) \times (\sqrt{n^2+an} + n)}{(\sqrt{n^2+an} + n)}$$

$$\iff U_n = \frac{n^2+an-n^2}{\sqrt{n^2+an}+n}$$

$$\iff U_n = \frac{an}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{a}{n}\right)}+n}.$$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{an}{|n| \times \sqrt{1+\frac{a}{n}}+n}$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{an}{n \times \sqrt{1 + \frac{a}{n}} + n} \quad (|n| = n \text{ car } n > 0)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{an}{n + n} \quad \left(\lim_{n \to +\infty} \frac{a}{n} = 0 \right)$$

$$= \frac{a}{2}.$$

Ainsi: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \frac{a}{2}$.

2. Concluons:

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \frac{a}{2}$, qui est une limite finie, nous pouvons affirmer que:

la suite (U_n) est convergente et converge vers $\frac{a}{2}$.