

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

Limite d'une Suite



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

LA NATURE D'UNE SUITE (u_n)

3

CORRECTION

Préalablement, notons que déterminer la nature d'une suite revient à dire si la suite est convergente ou divergente.

1. Déterminons la nature de la suite (u_n) :

$$\text{Ici: } u_n = \frac{9^n - 3}{3^n + 5} \Leftrightarrow u_n = \frac{9^n \left(1 - \frac{3}{9^n}\right)}{3^n \left(1 + \frac{5}{3^n}\right)}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \left(\frac{9}{3}\right)^n \times \frac{\left(1 - \frac{3}{9^n}\right)}{\left(1 + \frac{5}{3^n}\right)}$$

$$\Leftrightarrow u_n = 3^n \times \frac{\left(1 - \frac{3}{9^n}\right)}{\left(1 + \frac{5}{3^n}\right)}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \times \frac{\left(1 - \frac{3}{9^n}\right)}{\left(1 + \frac{5}{3^n}\right)}.$$

Or: • $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{3}{9^n} = 0.$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{3^n} = 0.$

Dans ces conditions: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \times \left(\frac{1}{1}\right)$
 $= +\infty.$

En conclusion, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$: la suite (U_n) est **divergente**.

2. Déterminons la nature de la suite (U_n) :

Ici: $U_n = 2^n - 3^n \Leftrightarrow U_n = 3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 \right)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 \right).$$

Or: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (car: $\frac{2}{3} < 1$).

Dans ces conditions: $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n (0 - 1)$
 $= -\infty.$

En conclusion, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$: la suite (U_n) est **divergente**.