

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

Triangle de **Pascal**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

COEFFICIENTS BINOMIAUX

7

CORRECTION

1. Calculons $\binom{13}{12}$, $\binom{12}{11} + \binom{12}{12}$ et concluons:

$$\bullet \binom{13}{12} = \frac{13!}{12!(13-12)!} = \frac{13!}{12!(1)!} = 13.$$

$$\bullet \binom{12}{11} + \binom{12}{12} = \left[\frac{12!}{11!(12-11)!} \right] + \left[\frac{12!}{12!(12-12)!} \right] = \frac{12!}{11!(1)!} + \frac{12!}{12!(0)!} = 13.$$

Ainsi, nous pouvons conclure que: $\binom{13}{12} = \binom{12}{11} + \binom{12}{12}$.

2. Calculons $\binom{7}{3}$, $\binom{6}{2} + \binom{6}{3}$ et concluons:

$$\bullet \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!(4)!} = \frac{(7 \times 6 \times 5) \times (4!)}{3!(4)!} = \frac{35 \times 6}{3!} = 35.$$

$$\bullet \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = \left[\frac{6!}{2!(6-2)!} \right] + \left[\frac{6!}{3!(6-3)!} \right] = \frac{6!}{2!(4)!} + \frac{6!}{3!(3)!}$$

$$= \frac{(6 \times 5) \times (4!)}{2! (4)!} + \frac{(6 \times 5 \times 4) \times (3!)}{3! (3)!}$$

$$= 35.$$

Ainsi, nous pouvons conclure que: $\binom{7}{3} = \binom{6}{2} + \binom{6}{3}$.

3. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ ($0 \leq k \leq n$), $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$:

Pour tout entier naturel n et entier naturel k , avec $0 \leq k \leq n$:

$$\bullet \binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)! ((n+1) - (k+1))!} = \left[\frac{n+1}{k+1} \right] \times \frac{n!}{k! \times (n-k)!}.$$

$$\bullet \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k! (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)! (n - (k+1))!}$$

$$= \frac{n!}{k! (n-k)!} + \frac{n!}{(k+1) k! (n-k-1)!} \times \left[\frac{n-k}{n-k} \right]$$

$$= \frac{n!}{k! (n-k)!} + \frac{n! \times (n-k)}{(k+1) k! (n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k! (n-k)!} \times \left[1 + \frac{(n-k)}{(k+1)} \right]$$

$$= \left[\frac{1 \times (k+1) + (n-k)}{k+1} \right] \times \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

$$= \left[\frac{n+1}{k+1} \right] \times \frac{n!}{k! (n-k)!}.$$

Ainsi, pour tous entiers naturels n et k ($0 \leq k \leq n$), nous avons toujours:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$