

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

Espérance & Variance



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

$$Z = X + Y$$

CORRECTION

1. Déterminons la constante α :

D'après le cours, nous savons que: • $P(X=3) + P(X=7) + P(X=37) = 1$
 • $P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) = 1$ (I)

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} [(3\alpha) + (6\alpha) + (7\alpha)] + [(9\alpha) + (12\alpha) + (15\alpha)] + [(18\alpha)] = 1 \\ [(3\alpha) + (9\alpha)] + [(6\alpha) + (12\alpha)] + [(7\alpha) + (15\alpha) + (18\alpha)] = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 70\alpha = 1. \end{cases}$$

D'où: $\alpha = \frac{1}{70}$.

2. Calculons $P(X < 37)$:

$$P(X < 37) = P(X \leq 7)$$

$$= P(X=3) + P(X=7)$$

$$= \left[\left(3 \times \frac{1}{70} \right) + \left(6 \times \frac{1}{70} \right) + \left(7 \times \frac{1}{70} \right) \right] + \left[\left(9 \times \frac{1}{70} \right) + \left(12 \times \frac{1}{70} \right) + \left(15 \times \frac{1}{70} \right) \right]$$

$$= \frac{26}{35}$$

3. a. Déterminons la loi de probabilité de $Z = X + Y$:

- Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire (v. a.) Z sont:

$$3 (3 + 0), 4 (3 + 1), 5 (3 + 2), 7 (7 + 0), 8 (7 + 1),$$

$$9 (7 + 2), 37 (37 + 0), 38 (37 + 1), 39 (37 + 2).$$

Ainsi, $Z(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre la v. a. Z est:

$$Z(\Omega) = \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 37, 38, 39\}.$$

- Nous avons:
 - $P(Z = 3) = P(X = 3 \cap Y = 0) = \frac{3}{70}$;
 - $P(Z = 4) = P(X = 3 \cap Y = 1) = \frac{6}{70}$;
 - $P(Z = 5) = P(X = 3 \cap Y = 2) = \frac{7}{70}$;
 - $P(Z = 7) = P(X = 7 \cap Y = 0) = \frac{9}{70}$;
 - $P(Z = 8) = P(X = 7 \cap Y = 1) = \frac{12}{70}$;
 - $P(Z = 9) = P(X = 7 \cap Y = 2) = \frac{15}{70}$;
 - $P(Z = 37) = P(X = 37 \cap Y = 0) = 0$;
 - $P(Z = 38) = P(X = 37 \cap Y = 1) = 0$;
 - $P(Z = 39) = P(X = 37 \cap Y = 2) = \frac{18}{70}$.

Notons que: $P(Z=3) + P(Z=4) + P(Z=5) + \dots + P(Z=39) = 1$.

- La loi de probabilité de la v. a. Z est donc:

z_i	3	4	5	7	8	9	37	38	39
$P(Z=z_i)$	$\frac{3}{70}$	$\frac{6}{70}$	$\frac{7}{70}$	$\frac{9}{70}$	$\frac{12}{70}$	$\frac{15}{70}$	0	0	$\frac{18}{70}$

3. b. Déduisons-en $E(Z)$:

Nous allons appliquer les propriétés du cours:

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{516}{35}.$$