

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

Espérance & Variance



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

VARIABLES ALÉATOIRES X ET $Z = \frac{1}{X}$

CORRECTION

1 Calculons $E(Z)$:

- **Étape 1:** détermination de la loi de probabilité de X .

Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire (v. a.) X sont:

$$1, 2, 3.$$

Ainsi, $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre la v. a. X est:

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3\}.$$

Il y a donc 3 possibilités.

Comme les valeurs prises par la v. a. X sont équiprobables, nous avons:

$$P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = \frac{1}{3}.$$

La loi de probabilité de la v. a. X est donc:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

- **Étape 2:** détermination de la loi de probabilité de Z .

Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire (v. a.) Z sont:

$$\frac{1}{3} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}.$$

Ainsi, $Z(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre la v. a. Z est:

$$Z(\Omega) = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \right\}.$$

Il y a donc 3 possibilités.

Comme les valeurs prises par la v. a. X sont équiprobables, il en est de

même pour celles de la v. a. Z : $P(Z=1) = P\left(Z=\frac{1}{2}\right) = P\left(Z=\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

La loi de probabilité de la v. a. Z est donc:

z_i	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$P(Z=z_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

- **Étape 3:** calcul effectif de $E(Z)$.

D'après le cours: $E(Z) = \sum_{i=1}^n P(Z=z_i) \times z_i$.

$$\text{Ici: } E(Z) = \left(\frac{1}{3} \times 1\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18}.$$

2 Déduisons-en V (Z):

D'après le cours: $V(X) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i^2 - [E(X)]^2$.

$$\begin{aligned} \text{Ici: } V(Z) &= \left(\frac{1}{3} \times 1^2\right) + \left(\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) - \left[\frac{11}{18}\right]^2 \\ &= \frac{13}{162}. \end{aligned}$$