

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

**TLE**

# Technologique Mathématiques

**Espérance & Variance**



**CORRIGÉ DE L'EXERCICE**

# VARIABLES ALÉATOIRES X, Y ET W

## CORRECTION

1. Déterminons la loi de probabilité de X:

- Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire (v. a.) X sont:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Ainsi,  $X(\Omega)$  l'ensemble des valeurs que peut prendre la v. a. X est:

$$X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Il y a donc 6 possibilités.

- Nous avons:
  - $P(X=1) = \frac{1}{6};$
  - $P(X=2) = \frac{1}{6};$
  - $P(X=3) = \frac{1}{6};$
  - $P(X=4) = \frac{1}{6};$
  - $P(X=5) = \frac{1}{6};$
  - $P(X=6) = \frac{1}{6}.$

Notons que:  $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) = 1$ .

- La loi de probabilité de la v. a.  $X$  est donc:

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. a. Déterminons la loi de probabilité de la v. a.  $Y = (X - 3)$ :

- Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire (v. a.)  $Y$  sont:  
 $-2 (1-3), -1 (2-3), 0 (3-3), 1 (4-3), 2 (5-3), 3 (6-3)$ .

Ainsi,  $Y(\Omega)$  l'ensemble des valeurs que peut prendre la v. a.  $Y$  est:

$$Y(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

Il y a donc 6 possibilités.

- Nous avons:
  - $P(Y = -2) = P(X = 1) = \frac{1}{6}$ ;
  - $P(Y = -1) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$ ;
  - $P(Y = 0) = P(X = 3) = \frac{1}{6}$ ;
  - $P(Y = 1) = P(X = 4) = \frac{1}{6}$ ;
  - $P(Y = 2) = P(X = 5) = \frac{1}{6}$ ;

$$\bullet P(Y=3) = P(X=6) = \frac{1}{6}$$

Notons que:  $P(Y=-2) + P(Y=-1) + P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) = 1$ .

- La loi de probabilité de la v. a.  $Y$  est donc:

$y_i$	-2	-1	0	1	2	3
$P(Y=y_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. b. Déterminons la loi de probabilité de la v. a.  $W = (X - 7)^2$ :

- Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire (v. a.)  $W$  sont:

$$36 (1-7)^2, 25 (2-7)^2, 16 (3-7)^2, 9 (4-7)^2, 4 (5-7)^2, 1 (6-7)^2.$$

Ainsi,  $W(\Omega)$  l'ensemble des valeurs que peut prendre la v. a.  $W$  est:

$$W(\Omega) = \{36, 25, 16, 9, 4, 1\}.$$

Il y a donc 6 possibilités.

- Nous avons:
  - $P(W=36) = P(X=1) = \frac{1}{6}$ ;
  - $P(W=25) = P(X=2) = \frac{1}{6}$ ;
  - $P(W=16) = P(X=3) = \frac{1}{6}$ ;
  - $P(W=9) = P(X=4) = \frac{1}{6}$ ;

$$\bullet P(W = 4) = P(X = 5) = \frac{1}{6};$$

$$\bullet P(W = 1) = P(X = 6) = \frac{1}{6}.$$

Notons que:  $P(W = 36) + P(W = 25) + P(W = 16) + P(W = 9) + P(W = 4) + P(W = 1) = 1.$

• La loi de probabilité de la v. a.  $W$  est donc:

$w_i$	36	25	16	9	4	1
$P(W = w_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3. a. Calculons  $E(X)$ :

D'après le cours:  $E(X) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i.$

$$\begin{aligned} \text{Ici: } E(X) &= \left(\frac{1}{6} \times 1\right) + \left(\frac{1}{6} \times 2\right) + \left(\frac{1}{6} \times 3\right) + \left(\frac{1}{6} \times 4\right) + \left(\frac{1}{6} \times 5\right) + \left(\frac{1}{6} \times 6\right) \\ &= \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

3. b. Calculons  $V(X)$ :

D'après le cours:  $V(X) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \times x_i^2 - [E(X)]^2.$

$$\text{Ici: } V(X) = \left(\frac{1}{6} \times 1^2\right) + \left(\frac{1}{6} \times 2^2\right) + \left(\frac{1}{6} \times 3^2\right) + \left(\frac{1}{6} \times 4^2\right) + \left(\frac{1}{6} \times 5^2\right)$$

$$+ \left( \frac{1}{6} \times 6^2 \right) - \left[ \frac{7}{2} \right]^2 = \frac{35}{12}.$$

4. a. Déduisons-en  $E(Y)$  et  $V(Y)$ :

Nous allons appliquer les propriétés du cours:

- $E(Y) = E(X - 3) = E(X) - 3 = \frac{1}{2};$

- $V(Y) = V(X - 3) = V(X) = \frac{35}{12}.$

4. b. Déduisons-en  $E(W)$ :

Comme précédemment, nous allons appliquer les propriétés du cours:

$$E(W) = E((X - 7)^2) = E(X^2 - 14X + 49)$$

$$= E(X^2) - 14E(X) + 49$$

$$= (V(X) + (E(X))^2)^* - 14E(X) + 49$$

$$= \frac{91}{6}.$$

(\*: d'après le cours,  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ .)