T^{LE} Technologique Mathématiques

Espérance & Variance

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

2 TIRAGES AVEC REMISE

CORRECTION

1. Déterminons $P_{B_1}(B_2)$, $P_{B_1}(N_2)$, $P_{N_1}(B_2)$ et $P_{N_1}(N_2)$:

Préalablement, notons que:
- l'urne contient au total $n + (n - 5) = 2n - 5$ boules,
- l'urne contient n boules blanches,
- l'urne contient $(n - 5)$ boules noires.

Dans ces conditions:
- $P(B_1) = \dfrac{n}{2n-5}$ et $P_{B_1}(B_2) = \left(\dfrac{n}{2n-5}\right) \times \left(\dfrac{n}{2n-5}\right)$,
- $P(N_1) = \dfrac{n-5}{2n-5}$ et $P_{N_1}(N_2) = \left(\dfrac{n-5}{2n-5}\right) \times \left(\dfrac{n-5}{2n-5}\right)$,
- $P_{B_1}(N_2) = \left(\dfrac{n}{2n-5}\right) \times \left(\dfrac{n-5}{2n-5}\right)$,
- $P_{N_1}(B_2) = \left(\dfrac{n-5}{2n-5}\right) \times \left(\dfrac{n}{2n-5}\right)$.

2. Pour quelle valeur de n le jeu est-il favorable au joueur ?

Soit X la variable aléatoire donnant le gain du joueur.

- Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire (v.a.) X sont:

-1 euro, 1 euro.

Ainsi, $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs que peut prendre la v.a. X est:

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}.$$

• Nous avons: • $P(X=-1) = P_{B_1}(B_2) + P_{N_1}(N_2) = \left(\frac{n}{2n-5}\right)^2 + \left(\frac{n-5}{2n-5}\right)^2$;

• $P(X=1) = P_{B_1}(N_2) + P_{N_1}(B_2) = 2 \times \left(\frac{n}{2n-5}\right) \times \left(\frac{n-5}{2n-5}\right)$.

Notons que: $P(X=-1) + P(X=1) = 1$.

• La loi de probabilité de la v.a. X est donc:

x_i	-1	1
$P(X=x_i)$	$\left(\frac{n}{2n-5}\right)^2 + \left(\frac{n-5}{2n-5}\right)^2$	$2 \times \left(\frac{n}{2n-5}\right) + \left(\frac{n-5}{2n-5}\right)$

• D'après le cours: • **un jeu est favorable au joueur quand $E(X) > 0$,**

• $E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(X=x_i) \times x_i$.

Ici: $E(X) = \left(\left[\left(\frac{n}{2n-5}\right)^2 + \left(\frac{n-5}{2n-5}\right)^2\right] \times (-1)\right) + \left(\left[2 \times \left(\frac{n}{2n-5}\right) \times \left(\frac{n-5}{2n-5}\right)\right] \times 1\right)$

$$= \frac{-25}{(2n-5)^2} < 0.$$

Comme $E(X) < 0$: le jeu ne sera jamais favorable au joueur, et ce pour toute valeur de n.