

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

**Nombres Complexes
Partie Géométrique**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

L'ENSEMBLE DES POINTS M...

3

CORRECTION

Déterminons l'ensemble E des points M (z) tels que: $\left(\frac{z-i-1}{z+1}\right) \in i\mathbb{R}^*$, avec $z \neq -1$.

- Pour tout $z \neq -1$ avec $z = x + iy$, nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{z-i-1}{z+1} &= \frac{x+iy-i-1}{x+iy+1} \\ &= \frac{(x-1)+i(y-1)}{(x+1)+iy} \\ &= \frac{[(x-1)+i(y-1)] \times [(x+1)-iy]}{[(x+1)+iy] \times [(x+1)-iy]} \\ &= \frac{x^2+y^2-y-1+2iy-ix-i}{(x+1)^2+y^2} \\ &= \frac{(x^2+y^2-y-1)}{(x+1)^2+y^2} + i \times \frac{(-x+2y-1)}{(x+1)^2+y^2}, \text{ avec } z \neq -1. \end{aligned}$$

- Or $\left(\frac{z-i-1}{z+1}\right) \in i\mathbb{R}^*$ et $z \neq -1$.

$$\text{D'où le système: } \begin{cases} z \neq -1 \\ \frac{x^2 + y^2 - y - 1}{(x+1)^2 + y^2} = 0 \\ \frac{-x + 2y - 1}{(x+1)^2 + y^2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ x^2 + y^2 - y - 1 = 0 \\ -x + 2y - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z \neq -1 \\ x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ y < \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Au total, l'ensemble E des points M (z) correspond: au demi-cercle de centre le point A de coordonnées $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ situé sous la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.