www.freemaths.fr

T^{LE} Technologique Mathématiques

Nombres Complexes
Exercice de Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE 6

CORRECTION

1\. a. **Vérifions que $a = \frac{3 - i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}$:**

Notons préalablement que:
- $z_0 = 8$,
- $z_1 = \frac{3 - i\sqrt{3}}{4} z_0$,
- $a = \frac{3 - i\sqrt{3}}{4}$.

- Le module de a est: $|a| = \left| \frac{3 - i\sqrt{3}}{4} \right|$ => $|a| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- Soit θ, l'argument de a:

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right).$$

Par identification:

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Au total: • L'argument et le module de **a** sont:

$$\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \text{ et } \ |a| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- Sous forme exponentielle **a** s'écrit: $a = \frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{-i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$.
- L'égalité $\frac{3 - i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$ est bien vérifiée.

1. b. b1. Déduisons-en les formes exponentielles de z_1, z_2 et z_3:

- La forme exponentielle de z_1 ?

$z_1 = \left(\frac{3 - i\sqrt{3}}{4}\right) z_0$, avec: $\frac{3 - i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_0 = 8$.

D'où: $z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \times 8 \Rightarrow z_1 = 4\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

- La forme exponentielle de z_2 ?

$z_2 = \left(\frac{3 - i\sqrt{3}}{4}\right) z_1$, avec: $\frac{3 - i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_1 = 4\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

D'où: $z_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \times \left(4\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \Rightarrow z_2 = 6\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

- La forme exponentielle de z_3 ?

$z_3 = \left(\frac{3 - i\sqrt{3}}{4}\right) z_2$, avec: $\frac{3 - i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $z_2 = 6\, e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

D'où: $z_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \times \left(6\, e^{-i\frac{\pi}{3}}\right) \Rightarrow z_3 = 3\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

Au total, sous forme exponentielle, z_1, z_2 et z_3 s'écrivent:

$$z_1 = 4\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}},\quad z_2 = 6\, e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ et } z_3 = 3\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

1. b. b2. Vérifions que z_3 est un imaginaire pur dont on précisera la partie imaginaire:

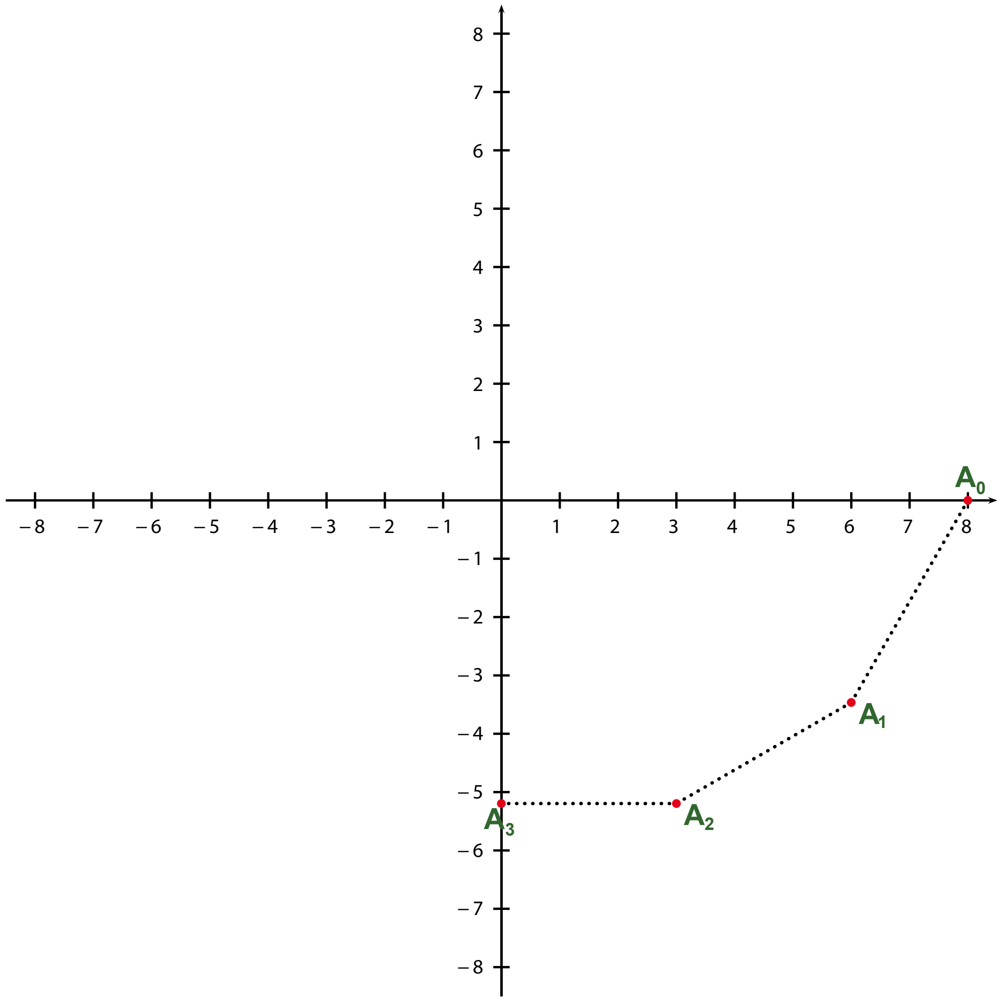
$$z_3 = 3\sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{2}} \iff z_3 = 3\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow z_3 = 3\sqrt{3}\left(i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \text{ ou: } z_3 = -3\sqrt{3} \times i.$$

Au total: z_3 est bien un imaginaire pur dont la partie imaginaire est: $-3\sqrt{3} \times i$.

1. c. Représentons graphiquement les points A_0, A_1, A_2 et A_3:

Voici le graphique sur lequel figurent les points A_0, A_1, A_2 et A_3:



2. a. Démontrons que, pour tout entier naturel n, $z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\left(\frac{n\pi}{6}\right)}$:

Nous allons montrer par récurrence que:

" pour tout entier naturel n: $z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\left(\frac{n\pi}{6}\right)}$ ".

Initialisation: • $z_0 = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 e^{-i\left(\frac{n\pi}{6}\right)}$?

oui car: $8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^0 e^{-i\left(\frac{n\pi}{6}\right)} = 8,$

et: $z_0 = 8$, d'après l'énoncé.

Donc vrai au rang " 0 ".

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\left(\frac{n\pi}{6}\right)}$

et montrons qu'alors $z_{n+1} = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{(n+1)} \times e^{-i\left((n+1)\frac{\pi}{6}\right)}$.

Supposons: $z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\left(\frac{n\pi}{6}\right)}$, pour un entier naturel n fixé.
(1)

(1) $\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \times z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}\right) \times 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\left(\frac{n\pi}{6}\right)}$

$\Rightarrow z_{n+1} = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{(n+1)} \times e^{-i\left((n+1)\frac{\pi}{6}\right)}$.

Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n e^{-i\left(\frac{n\pi}{6}\right)}$.

2. b. Déterminons la nature et la limite de la suite (U_n):

• Nous avons: $U_n = |z_n|$.

D'où: $U_n = 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n, n \in \mathbb{N}.$

Nous sommes donc en présence d'une suite **géométrique** de premier terme $U_0 = 8$ et de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

- De plus: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

$= 0$ car: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n = 0$, car: $\frac{\sqrt{3}}{2} \in]0, 1[$.

Au total: • (U_n) est une suite géométrique de premier terme $U_0 = 8$ et de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

• (U_n) converge vers " 0 " en $+\infty$.

3. a. a1. Démontrons l'égalité demandée:

Il s'agit de montrer que: $\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} i, k \in \mathbb{N}.$

$$\frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = \frac{\left(\frac{3 - i\sqrt{3}}{4}\right) z_k - z_k}{\frac{3 - i\sqrt{3}}{4} z_k}$$

$$= \frac{\left(\frac{3 - i\sqrt{3}}{4}\right) - 1}{\frac{3 - i\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \frac{(-1 - i\sqrt{3}) \times (3 + i\sqrt{3})}{12}$$

$$= \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) i \quad \text{ou:} \quad \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) i.$$

Au total, nous avons bien: $\dfrac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}\, i.$

3. a. a2. Déduisons-en que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k A_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} OA_{k+1}$:

Nous avons: $A_k A_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} OA_{k+1} \iff \dfrac{A_k A_{k+1}}{OA_{k+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

Or: $\dfrac{A_k A_{k+1}}{OA_{k+1}} = \dfrac{|z_{k+1} - z_k|}{|z_{k+1}|}$

$$= \left| \frac{z_{k+1} - z_k}{z_{k+1}} \right|$$

$$= \left| \frac{-1}{\sqrt{3}}\, i \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Au total, nous avons bien: $\dfrac{A_k A_{k+1}}{OA_{k+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ cad: $A_k A_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} OA_{k+1}.$

3. b. Démontrons que la suite (P_n) est convergente et calculons sa limite:

Préalablement calculons P_n.

Nous avons: $P_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n.$

D'où: $P_n = \dfrac{1}{\sqrt{3}} (OA_1 + OA_2 + \dots + OA_n)$, car: $A_k A_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} OA_{k+1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^1 + 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \dots + 8 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n \right)$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} (b^1 + b^2 + b^3 \dots + b^n), \quad \text{avec:} \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}}\left(\frac{1-b^{(n+1)}}{1-b} - 1\right), \text{ car: } 1+q+q^2 \ldots + q^n = \frac{1-q^{(n+1)}}{1-q}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}}\left[\frac{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{(n+1)}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} - 1\right]$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}}\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{(n+1)}}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right]$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}}\left[\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}\right)}{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}\right] = \frac{8}{2-\sqrt{3}}\left[1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}\right].$$

Au total, nous avons: $P_n = \dfrac{8}{2-\sqrt{3}} \times \left[1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}\right].$

Dans ces conditions:

- $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = \dfrac{8}{2-\sqrt{3}}$ car: $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n} = 0$, car: $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \in]0, 1[$.

- Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = \dfrac{8}{2-\sqrt{3}}$ qui est une limite finie: (P_n) est convergente.

Au total:
- $P_n = \dfrac{8}{2-\sqrt{3}}\left[1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n}\right]$,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = \dfrac{8}{2-\sqrt{3}}$,
- (P_n) est une suite convergente qui converge vers " $\dfrac{8}{2-\sqrt{3}}$ ".