

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

**TLE**

# Technologique Mathématiques

**Nombres Complexes  
Exercice de Synthèse**



**CORRIGÉ DE L'EXERCICE**

## CORRECTION

1. a. Déterminons la forme algébrique de l'affixe du point A' :

Nous savons que:  $f(z) = z'$ , avec  $z' = -\frac{1}{z}$ .

Ici: A ( $z_A$ ) avec  $z_A = -1 + i$ .

Dans ces conditions:  $f(z_A) = z'_A$

$$\Leftrightarrow f(z_A) = \frac{-1}{z_A}$$

$$\Leftrightarrow f(z_A) = \frac{-1}{-1+i}$$

$$\Leftrightarrow f(z_A) = \frac{-(1+i)}{(-1+i)(1+i)}$$

$$\Leftrightarrow f(z_A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

Ainsi, la forme algébrique de l'affixe du point A' est:  $z'_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ .

1. b. Déterminons la forme exponentielle de l'affixe du point B' :

Nous savons que:  $f(z) = z'$ , avec  $z' = -\frac{1}{z}$ .

Ici: B ( $z_B$ ) avec  $z_B = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

Dans ces conditions:  $f(z_B) = z_{B'}$

$$\Leftrightarrow f(z_B) = \frac{-1}{z_B}$$

$$\Leftrightarrow f(z_B) = \frac{-1}{\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow f(z_B) = -2 e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Leftrightarrow f(z_B) = 2 \times e^{i\pi} \times e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

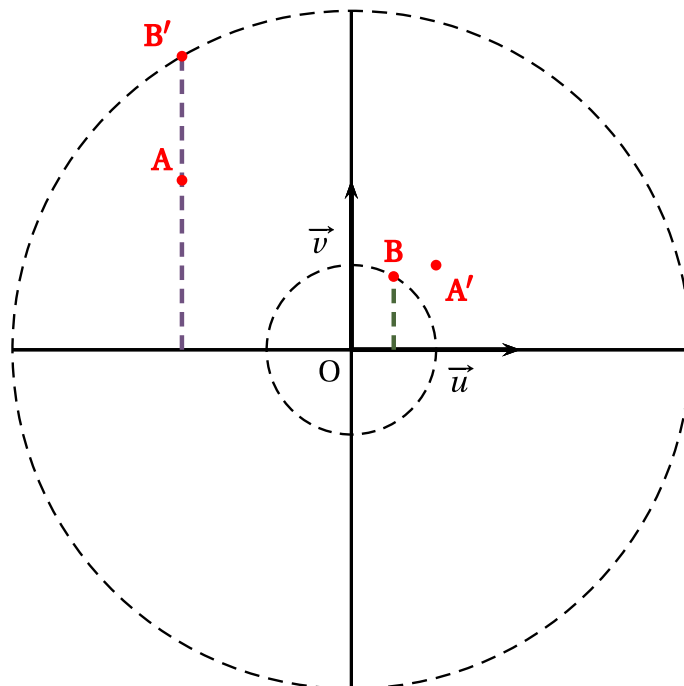
$$\Leftrightarrow f(z_B) = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Ainsi, la forme exponentielle de l'affixe du point B' est:  $z_{B'} = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

I. c. Représentation graphique dans le repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ :

Nous avons le graphique suivant avec:

$$A(-1+i), B\left(\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{3}}\right), A'\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) \text{ et } B'\left(2 e^{i\frac{2\pi}{3}}\right).$$



2. a. Montrons que  $z' = \frac{l}{r} e^{i(\pi-\theta)}$ .

Nous savons que:  $f(z) = z'$ , avec  $z' = -\frac{l}{z}$ .

Ici:  $z = r e^{i\theta}$ .

Dans ces conditions:  $f(z) = z'$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{-l}{z}$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{-l}{r e^{i\theta}}$$

$$\Leftrightarrow f(z) = -\frac{l}{r} \times e^{-i\theta}$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \frac{l}{r} \times e^{i\pi} \times e^{-i\theta}$$

$$\Leftrightarrow f(z) = z' = \frac{l}{r} e^{i(\pi-\theta)}$$

Au total, nous avons bien:  $z' = \frac{l}{r} e^{i(\pi-\theta)}$ .

2. b. Est-ce vrai ? Justifions:

Si un point  $M$ , distinct de  $O$ , appartient au disque de centre  $O$  et de rayon  $l$  sans appartenir au cercle de centre  $O$  et de rayon  $l$ , alors nous pouvons écrire:

$$OM < l \Leftrightarrow |z| < l$$

$$\Leftrightarrow \frac{l}{|z|} > 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{l}{z} \right| > 1$$

$$\Leftrightarrow \left| -\frac{1}{z} \right| > 1$$

$$\Leftrightarrow |z'| > 1 \text{ cad: } OM' > 1.$$

(M(z) et M'(z'))

Au total, nous venons de justifier que c'est: vrai.

3. a. Montrons qu'une équation cartésienne du cercle est  $x^2 + x + y^2 = 0$ :

D'après le cours, nous savons qu'une équation cartésienne d'un cercle de

centre K  $\left( z_K = -\frac{1}{2} \right)$  ou K  $\left( -\frac{1}{2}; 0 \right)$  et de rayon  $R = \frac{1}{2}$  s'écrit:

$$(x - x_K)^2 + (y - y_K)^2 = R^2 \Leftrightarrow \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 + (y - 0)^2 = \left( \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{4} + x + y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x + y^2 = 0.$$

Ainsi, une équation cartésienne du cercle est bien:  $x^2 + x + y^2 = 0$ .

3. b. Déterminons la forme algébrique de  $z'$  sachant que  $z = x + iy$ :

Ici:  $z' = -\frac{1}{z}$ , avec  $z = x + iy$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  et  $y \in \mathbb{R}^*$ .

$$\text{D'où: } z' = \frac{-1}{x + iy}$$

$$= \frac{-(x - iy)}{x^2 + y^2}$$

$$= \left( \frac{-x}{x^2 + y^2} \right) + i x \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Ainsi, algébriquement  $z'$  s'écrit:  $z' = \left( \frac{-x}{x^2 + y^2} \right) + i x \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$  et  $y \in \mathbb{R}^*$ .

3. c. Montrons que  $M'$  appartient à la droite d'équation  $x = 1$ :

D'après la question précédente, la partie réelle de  $z'$  cad l'abscisse de  $M'$  est:

$$\frac{-x}{x^2 + y^2}, \text{ avec } x \in \mathbb{R}^* \text{ et } y \in \mathbb{R}^*.$$

Or le point  $M(x, y)$ , distinct de  $O$ , appartient au cercle de centre  $K \left( z_K = -\frac{1}{2} \right)$  et de rayon  $R = \frac{1}{2}$ .

D'où nous avons:  $x^2 + x + y^2 = 0$  cad:  $x^2 + y^2 = -x$ .

Dans ces conditions: 
$$\frac{-x}{x^2 + y^2} = \frac{-x}{-x} = 1.$$

Ainsi, l'abscisse du point  $M'$  est égale à 1.

**Au total:**  $M'$  appartient donc bien à la droite d'équation  $x = 1$ .