

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

**Nombres Complexes
Exercice de Synthèse**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Calculons BJ et déduisons-en BK:

D'après l'énoncé: • B (z_B) avec $z_B = -1$,
• J (z_J) avec $z_J = \frac{1}{2}i$.

• Étape 1:

L'équation d'un cercle de centre A (a, b) et de rayon R est:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

Ici: le centre est J $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et le rayon est $R = \frac{1}{2}$.

Donc \mathcal{C} est un cercle d'équation: $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

• Étape 2:

B $(-1, 0)$ et J $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Or, l'équation du segment [BJ] est de la forme: $y = ax + b$. (1)

Comme B et J appartiennent au segment [BJ], nous avons le système suivant:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -a + b \\ \frac{1}{2} = b \end{cases} \text{ cad } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Le segment [BJ] a donc pour équation: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

• Étape 3: Calcul de BJ.

$$BJ = |z_J - z_B| \Leftrightarrow BJ = \left| \frac{1}{2}i + 1 \right| \text{ cad } BJ = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

• Étape 4: Calcul de BK.

Le point K vérifie le système:

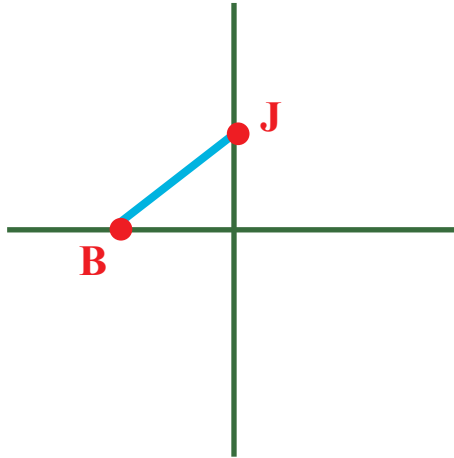
$$\begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \frac{1}{4} \\ y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{1}{5} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2} \text{ ou } y = \frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2} \end{cases}$$

D'où 2 solutions: $u_1 \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2} \right)$ et $u_2 \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2} \right)$.

Nous retiendrons la solution u_1 , car graphiquement nous voyons que le point K a un abscisse et une ordonnée forcément négatifs.



Au total:

- $K(z_k)$ avec $z_k = -\frac{\sqrt{5}}{5} + i \left(-\frac{\sqrt{5}}{10} + \frac{1}{2} \right)$,
- $BK = |z_k - z_B|$ cad $BK = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1)$.

2. a. Donnons la forme exponentielle de l'affixe z_2 de A_2 :

• Le module de z_2 est: $|z_2| = 1$.

En effet, d'après l'énoncé: • $\overrightarrow{OA_0} = \vec{u}$

• les 5 côtés ont la même longueur.

Donc: $\overrightarrow{OA_2} = \vec{u}$, avec $|\vec{u}| = 1$.

• L'argument de z_2 est: $\theta = \frac{2\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}$ cad $\theta = \frac{4\pi}{5} [2\pi]$.

Sous forme exponentielle z_2 s'écrit: $z_2 = 1 \cdot e^{i\frac{4\pi}{5}}$.

2. b. Démontrons que $BA_2^2 = 2 + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$:

$$BA_2^2 = |z_2 - z_B|^2 \Leftrightarrow BA_2^2 = \left(\left(\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1 \right)^2 + \left(\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \right)^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow BA_2^2 = \cos^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{4\pi}{5}\right) + 1 + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow BA_2^2 = 2 + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right).$$

Au total: $BA_2^2 = 2 + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

2. c. Déduisons-en que $BA_2 = BK$:

D'après le logiciel: $\bullet \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{1}{4}(-\sqrt{5} - 1),$

$$\bullet \left(\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(-\sqrt{5} - 1).$$

Or: $BA_2 = \left(2 + 2 \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow BA_2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\Leftrightarrow BA_2 = \left(\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow BA_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Au total: $BA_2 = BK = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1).$

