

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

**Nombres Complexes
Exercice de Synthèse**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A

1. Exprimons l'affixe du point R en fonction de z :

D'après le graphique, les points M et R sont situés sur le même cercle d'équation: $x^2 + y^2 = (\text{rayon})^2$.

Ainsi, nous pouvons affirmer que: $OM = OR = \text{rayon}$.

Or comme le point R est sur l'axe des abscisses, nous pouvons écrire:

$$z_R = |z_R| (\cos\theta + i\sin\theta) \Leftrightarrow z_R = |z_R| (\cos 0 + i\sin 0)$$

$$\Leftrightarrow z_R = |z_R|$$

$$\Leftrightarrow z_R = |z| \quad (|z_R| = |z| \text{ car } OM = OR).$$

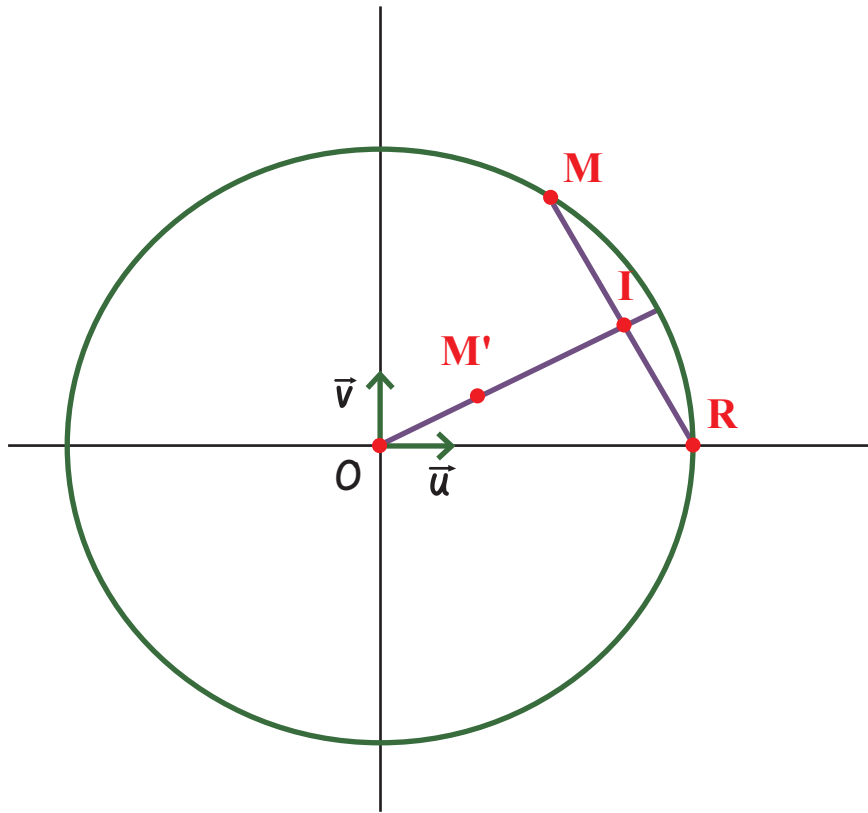
Au total, l'affixe du point R est: $z_R = |z|$.

2. Représentation graphique:

Notons que: • le point d'affixe $\frac{z + |z|}{2}$ correspond au point I , milieu du segment $[MR]$;

- le point M' est alors le milieu du segment $[OI]$.

D'où le graphique suivant:



Partie B

1. Déterminons le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$, quand z_0 est un réel strictement négatif:

Nous avons: $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $z_0 \in]-\infty; 0[$.

Comme $z_0 \in]-\infty; 0[$: $|z_0| = -z_0$.

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer que: si $z_0 \in]-\infty; 0[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = 0$.

Initialisation:

$$\bullet z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{4} \Leftrightarrow z_1 = \frac{z_0 - z_0}{4} \Rightarrow z_1 = 0, \text{ vrai.}$$

$$\bullet z_2 = \frac{z_1 + |z_1|}{4} \Leftrightarrow z_2 = \frac{z_1 - z_1}{4} \Rightarrow z_2 = 0, \text{ vrai.}$$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $z_n = 0$ et montrons qu'alors $z_{n+1} = 0$.

Supposons: $z_n = 0$, pour un entier naturel n fixé (1).

$$(1) \Rightarrow z_n + |z_n| = 0$$

$$\Rightarrow \frac{z_n + |z_n|}{4} = 0$$

$$\Rightarrow z_{n+1} = 0.$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons: $z_n = 0$.

Dans ces conditions: $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 0$.

Au total: la suite $(|z_n|)$ est convergente et converge vers le point 0 (0).

2. Déterminons le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$, quand z_0 est un réel strictement positif:

Nous allons: $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{4}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $z_0 \in]-\infty; 0[$.

Comme $z_0 \in]0; +\infty[$: $|z_0| = z_0$.

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer que: si $z_0 \in]0; +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = \frac{z_0}{2^n}$.

Initialisation:

- $z_0 = x \Rightarrow z_0 = \frac{x}{2^0}$, **vrai**. (en posant: $z_0 = x$)

- $z_1 = \frac{z_0 + |z_0|}{4} \Leftrightarrow z_1 = \frac{x + x}{4} \Rightarrow z_1 = \frac{x}{2^1}$ ou $z_1 = \frac{z_0}{2^1}$, **vrai**.

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $z_n = \frac{z_0}{2^n}$ et montrons qu'alors $z_{n+1} = \frac{z_0}{2^{n+1}}$.

Supposons: $z_n = \frac{z_0}{2^n}$, pour un entier naturel n fixé (1).

$$(1) \Rightarrow z_n + |z_n| = \frac{z_0}{2^n} + \frac{z_0}{2^n}$$

$$\Rightarrow \frac{z_n + |z_n|}{4} = \frac{1}{2} \left(\frac{z_0}{2^n} \right)$$

$$\Rightarrow z_{n+1} = \frac{z_0}{2^{n+1}}$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons: $z_n = \frac{z_0}{2^n}$.

Dans ces conditions: $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{z_0}{2^n} \right|$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z_0}{2^n}$$

$$= 0.$$

Au total: la suite $(|z_n|)$ est convergente et converge vers le point 0 (0).

3. a. Quelle conjecture si z_0 n'est pas un réel ?

$$\text{Nous avons: } |z_n| \leq \frac{1}{2} |z_{n-1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |z_{n-2}| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|.$$

$$\text{D'où: } \lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|.$$

$$\text{Or: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| = 0, \text{ car: } \frac{1}{2} \in]0, 1[.$$

Au total, comme $|z_n| \geq 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 0$ (conjecture).

3. b. Démontrons la conjecture et concluons:

Ayons recours à une démonstration par récurrence.

Nous allons montrer que: si z_0 n'est pas un réel, $\forall n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$.

Initialisation:

$$\bullet |z_0| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |z_0| \text{ ? vrai car: } |z_0| \leq |z_0|.$$

$$\bullet |z_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1 |z_0| \text{ ?}$$

$$|z_1| = \left| \frac{z_0 + |z_0|}{4} \right| \Leftrightarrow |z_1| = \frac{1}{4} |z_0 + |z_0||$$

$$\Rightarrow |z_1| \leq \frac{1}{4} (|z_0| + \|z_0\|)$$

$$\Rightarrow |z_1| \leq \frac{1}{4} (|z_0| + |z_0|)$$

$$\Rightarrow |z_1| \leq \frac{1}{2} |z_0|$$

$$\Rightarrow |z_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^1 |z_0|, \text{ donc } \mathbf{vrai}.$$

Hérédité: Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$ et montrons qu'alors

$$|z_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |z_0|.$$

Supposons: $|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$, pour un entier naturel n fixé (1).

$$(1) \Rightarrow z_n + |z_n| \leq z_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$$

$$\Rightarrow \frac{z_n + |z_n|}{4} \leq \frac{z_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|}{4}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{z_n + |z_n|}{4} \right| \leq \left| \frac{z_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|}{4} \right|$$

$$\Rightarrow |z_{n+1}| \leq \frac{1}{4} \left(|z_n| + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| \right)$$

$$\Rightarrow |z_{n+1}| \leq \frac{1}{4} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| + \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| \right)$$

$$\Rightarrow |z_{n+1}| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |z_0|.$$

Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}$, nous avons: $|z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$.

Au total: • $0 \leq |z_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0|$,

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |z_0| = 0$,

• d'après le théorème des gendarmes, nous pouvons alors affirmer que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 0$.

Dans ces conditions: la suite $(|z_n|)$ est convergente et converge vers le point 0 (0).