

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

**Nombres Complexes
Exercice de Synthèse**



ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

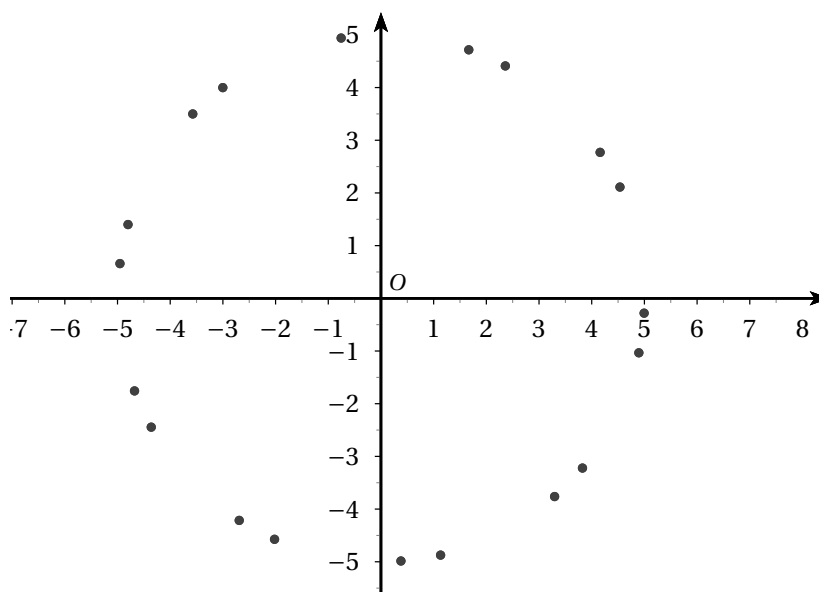
ÉNONCÉ

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n , on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n; y_n)$ de la façon suivante:

$$\begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{n+1} = 0,8 x_n - 0,6 y_n \\ y_{n+1} = 0,6 x_n + 0,8 y_n \end{cases}$$

1. a. Déterminer les coordonnées des points A_0 , A_1 et A_2 .

b. À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant:



Identifier les points A_0 , A_1 et A_2 . On les nommera sur la figure jointe.

Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.

Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n , $z_n = x_n + iy_n$ l'affixe du point A_n .

a. Soit $U_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n , $U_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

b. On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos\theta = 0,8$ et $\sin\theta = 0,6$.

Montrer que, pour tout entier naturel n : $e^{i\theta} \cdot z_n = z_{n+1}$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $z_n = e^{n\theta} \cdot z_0$.

d. Montrer que $\theta + \frac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0 .

e. Pour tout entier naturel n , déterminer, en fonction de n et θ , un argument du nombre complexe z_n . Représenter θ sur la figure.

Expliquer, pour tout entier naturel n , comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n .