T^LE

Technologique Mathématiques

Nombres Complexes Exercice de Synthèse

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE 16

CORRECTION

1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 8z + 64 = 0$:

Soit l'équation: $z^2 - 8z + 64 = 0$.

$\Delta = -192 \Rightarrow \Delta = (8\sqrt{3}i)^2$.

D'où 2 solutions dans $\mathbb{C}$:
- $z_1 = 4 - (4\sqrt{3})\,i$,
- $z_2 = 4 + (4\sqrt{3})\,i$.

Au total, les 2 solutions sont: $z_1 = 4 - (4\sqrt{3})\,i$ et $z_2 = 4 + (4\sqrt{3})\,i$.

2. a. Calculons l'argument et le module de a:

- Le module de a est: $|a| = 8$. $(a = 4 + 4i\sqrt{3})$
- Soit θ, l'argument de a: $a = 8\,(\cos\theta + i\sin\theta) = 8\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Par identification: $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ cad $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

L'argument et le module de " a " sont: $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $|a| = 8$.

Sous forme exponentielle " a " s'écrit: $a = 8e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. b. Donnons la forme exponentielle de b:

- Le module de b est: $|b| = 8$. $(b = 4 - 4i\sqrt{3})$

- Soit θ, l'argument de b: $b = 8\,(\cos\theta + i\sin\theta) = 8\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Par identification: $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ cad $\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Sous forme exponentielle " b " s'écrit: $b = 8e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2. c. Montrons que les points A, B et C sont sur un même cercle dont on déterminera le rayon:

Les points A (a), B (b) et C (c) sont sur un même cercle de centre O ssi:

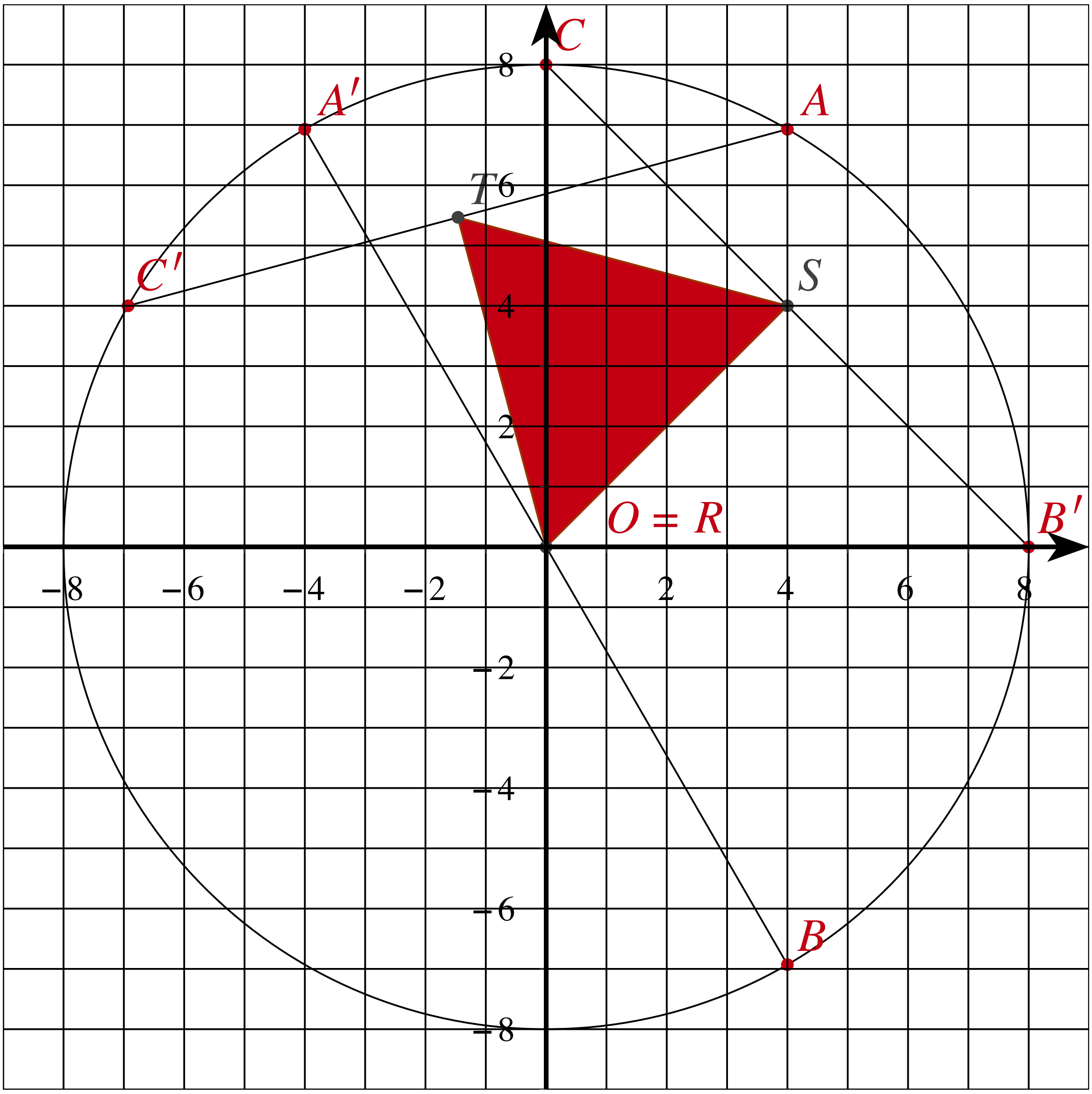
$$|a| = |b| = |c|.$$

Or: $|a| = 8, |b| = 8$ et $|c| = (8^2)^{1/2}$ cad $|c| = 8$.

Au total, les points A, B et C sont sur un même cercle:

de centre O et de rayon $R = 8$.

2. d. Plaçons les points A, B et C:



3. a. Montrons que b' = 8:

Nous avons: $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$.

D'où: $b' = \left(8e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ cad $b' = 8$.

Au total: $b' = 8$.

3. b. Calculons le module et un argument du nombre a':

Nous avons: $a' = a e^{i\frac{\pi}{3}}$.

D'où: $a' = \left(8 e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$ cad $a' = 8 e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Au total:
- le module de a' est: $|a'| = 8$,
- un argument de a' est: $\frac{2\pi}{3}$.

4. a. Calculons r et s:

- Nous avons R (r), R étant le milieu du segment [A'B].

D'où: $r = \frac{a' + b}{2} \iff r = \frac{(-4 + 4i\sqrt{3}) + (4 - 4i\sqrt{3})}{2}$ cad $r = 0$.

- Nous avons S (s), S étant le milieu du segment [B'C].

D'où: $s = \frac{b' + c}{2} \iff s = \frac{(8) + (8i)}{2}$ cad $s = 4 + 4i$.

Au total: $r = 0$ et $s = 4 + 4i$.

4. b. La conjecture sur la nature du triangle RST:

Comme $RS = ST = RT$ car $|s - r| = |t - s| = |t - r| = 4\sqrt{2}$, nous pouvons affirmer que: le triangle RST est équilatéral.