www.freemaths.fr

TLE Technologique Mathématiques

Nombres Complexes Exercice de Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

NOMBRES COMPLEXES, SYNTHÈSE 13

ÉNONCÉ

On définit, pour tout entier naturel n, les nombres complexes z par:

$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n, \text{ pour tout entier naturel } n. \end{cases}$$

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O, on considère les points A_n d'affixes z_n.

1. **a.** Calculer z_1, z_2 et z_3.

b. Placer les points A_1 et A_2 sur un graphique.

c. Écrire le nombre complexe $\dfrac{1+i}{2}$ sous forme exponentielle.

d. Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

La suite (r_n) est-elle convergente ? Interpréter.

Freemaths : Tous droits réservés

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les points A_1, A_2, A_3, etc.

Ainsi: $L_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i A_{i+1} = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n: $A_n A_{n+1} = r_{n+1}$.

b. Donner une expression de L_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n).

Freemaths : Tous droits réservés