

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

**TLE**

# Technologique Mathématiques

**Nombres Complexes  
Exercice de Synthèse**



**CORRIGÉ DE L'EXERCICE**

## CORRECTION

1. Donnons une solution entière de (E):

L'équation (E) est:  $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$ .

En tâtonnant, nous trouvons que  $z = 1$  est une solution entière de (E).

Au total, une solution entière de (E) est:  $z = 1 \in \mathbb{R}$ .

2. Démontrons que, pour tout nombre complexe  $z$ , l'égalité (1) est vérifiée:

Soit (1), l'égalité:  $z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)$ .

$$\begin{aligned} (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) &= z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2 \\ &= z^4 + 2z^3 - z - 2. \end{aligned}$$

Au total: l'égalité (1) est bien vérifiée.

3. Résolvons l'équation E dans l'ensemble des nombres complexes:

Pour répondre à cette question, nous allons résoudre 2 équations:

$$z^2 + z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad z^2 + z + 1 = 0.$$

• Soit l'équation:  $z^2 + z - 2 = 0$ .

$$\Delta = 9 > 0 \iff \Delta = (3)^2 > 0.$$

D'où 2 solutions dans  $\mathbb{C}$ :

$$\bullet z_1 = \frac{-1-3}{2} \Rightarrow z_1 = -2,$$

$$\bullet z_2 = \frac{-1+3}{2} \Rightarrow z_2 = 1.$$

• Soit l'équation:  $z^2 + z + 1 = 0$ .

$$\Delta = -3 < 0 \Leftrightarrow \Delta = (\sqrt{3}i)^2 < 0.$$

D'où 2 solutions dans  $\mathbb{C}$ :

$$\bullet z_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i,$$

$$\bullet z_4 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i.$$

Au total, 4 solutions dans  $\mathbb{C}$ :

$$\bullet z_1 = -2$$

$$\bullet z_2 = 1$$

$$\bullet z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$$

$$\bullet z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i.$$

4. Le quadrilatère ABCD est-il un losange ?

Soient les points: A (1), B  $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right)$ , C (-2) et D  $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right)$ .

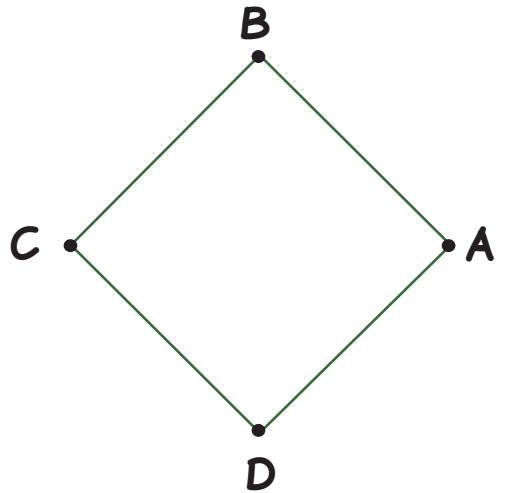
Le quadrilatère ABCD est un losange ssi:

$$\bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\bullet \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \quad ,$$

$$\bullet (BD) \perp (CA)$$

avec:



Or: •  $\overline{AB} = \overline{DC}$  ssi  $z_{\overline{AB}} = z_{\overline{DC}}$ . (formule de cours)

$$\text{Ici: } z_{\overline{AB}} \left( -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right) \text{ et } z_{\overline{DC}} = \left( -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right).$$

$$\text{Donc: } \overline{AB} = \overline{DC}.$$

•  $\overline{AD} = \overline{BC}$  ssi  $z_{\overline{AD}} = z_{\overline{BC}}$ . (formule de cours)

$$\text{Ici: } z_{\overline{AD}} \left( -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right) \text{ et } z_{\overline{BC}} = \left( -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right).$$

$$\text{Donc: } \overline{AD} = \overline{BC}.$$

•  $(BD) \perp (CA)$  ssi  $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$  est un imaginaire pur. (formule de cours)

$$\begin{aligned} \text{Ici: } \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B} &= \frac{1 - (-2)}{\left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right) - \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right)} \\ &= \frac{3}{-\sqrt{3} \cdot i} \\ &= \sqrt{3} \cdot i. \end{aligned}$$

Donc:  $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$  est un imaginaire pur.

Au total, comme  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  et  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  et  $(BD) \perp (CA)$ :

le quadrilatère ABCD est bien un losange.