

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

**Nombres Complexes
Exercice de Synthèse**



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

1. Donnons une solution entière de (E):

L'équation (E) est: $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$.

En tâtonnant, nous trouvons que $z = 1$ est une solution entière de (E).

Au total, une solution entière de (E) est: $z = 1 \in \mathbb{R}$.

2. Démontrons que, pour tout nombre complexe z , l'égalité (1) est vérifiée:

Soit (1), l'égalité: $z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)$.

$$\begin{aligned}(z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) &= z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2 \\ &= z^4 + 2z^3 - z - 2.\end{aligned}$$

Au total: l'égalité (1) est bien vérifiée.

3. Résolvons l'équation E dans l'ensemble des nombres complexes:

Pour répondre à cette question, nous allons résoudre 2 équations:

$$z^2 + z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad z^2 + z + 1 = 0.$$

• Soit l'équation: $z^2 + z - 2 = 0$.

$$\Delta = 9 > 0 \iff \Delta = (3)^2 > 0.$$

D'où 2 solutions dans \mathbb{C} :

$$\bullet z_1 = \frac{-1-3}{2} \Rightarrow z_1 = -2,$$

$$\bullet z_2 = \frac{-1+3}{2} \Rightarrow z_2 = 1.$$

• Soit l'équation: $z^2 + z + 1 = 0$.

$$\Delta = -3 < 0 \Leftrightarrow \Delta = (\sqrt{3}i)^2 < 0.$$

D'où 2 solutions dans \mathbb{C} :

$$\bullet z_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i,$$

$$\bullet z_4 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \Rightarrow z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i.$$

Au total, 4 solutions dans \mathbb{C} :

$$\bullet z_1 = -2$$

$$\bullet z_2 = 1$$

$$\bullet z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$$

$$\bullet z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i.$$

4. Le quadrilatère ABCD est-il un losange ?

Soient les points: A (1), B $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right)$, C (-2) et D $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right)$.

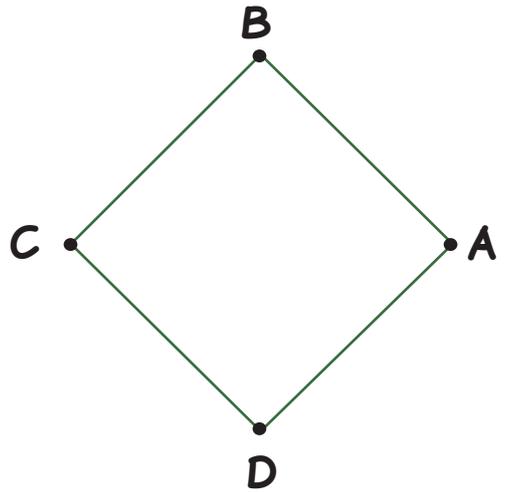
Le quadrilatère ABCD est un losange ssi:

$$\bullet \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

$$\bullet \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \quad ,$$

$$\bullet (BD) \perp (CA)$$

avec:



Or: • $\overline{AB} = \overline{DC}$ ssi $z_{\overline{AB}} = z_{\overline{DC}}$. (formule de cours)

$$\text{Ici: } z_{\overline{AB}} \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right) \text{ et } z_{\overline{DC}} = \left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right).$$

$$\text{Donc: } \overline{AB} = \overline{DC}.$$

• $\overline{AD} = \overline{BC}$ ssi $z_{\overline{AD}} = z_{\overline{BC}}$. (formule de cours)

$$\text{Ici: } z_{\overline{AD}} \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right) \text{ et } z_{\overline{BC}} = \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right).$$

$$\text{Donc: } \overline{AD} = \overline{BC}.$$

• $(BD) \perp (CA)$ ssi $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ est un imaginaire pur. (formule de cours)

$$\begin{aligned} \text{Ici: } \frac{z_A - z_C}{z_D - z_B} &= \frac{1 - (-2)}{\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \right)} \\ &= \frac{3}{-\sqrt{3} \cdot i} \\ &= \sqrt{3} \cdot i. \end{aligned}$$

Donc: $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ est un imaginaire pur.

Au total, comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $(BD) \perp (CA)$:

le quadrilatère ABCD est bien un losange.