T^LE

Technologique Mathématiques

Nombres Complexes
Équations Polynomiales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

$P(z) = 0$ ... 2

CORRECTION

1. Montrons que $P(z)$ est factorisable par $z^2 + 2$:

Ici: $P(z) = z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 6$.

$P(z)$ est factorisable par " $z^2 + 2$ " ssi il existe trois réels a, b et c tels que:

$$P(z) = (z^2 + 2)(az^2 + bz + c).$$

$P(z) = (z^2 + 2)(az^2 + bz + c) \iff P(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + 2az^2 + 2bz + 2c$

$\iff P(z) = az^4 + bz^3 + (c + 2a)z^2 + 2bz + 2c$

Par identification, nous avons:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c + 2a = 5 \\ 2b = 2 \\ 2c = 6 \end{cases} \quad \text{cad} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Ainsi, $P(z)$ est bien factorisable par " $z^2 + 2$ " et nous avons:

$$P(z) = (z^2 + 2)(z^2 + z + 3).$$

2. Déduisons-en les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$:

$P(z) = 0$ ssi $z^2 + 2 = 0$ ou $z^2 + z + 3 = 0$.

- L'équation $z^2 + 2 = 0$ admet deux solutions: $z_1 = \sqrt{2}\,i$ et $z_2 = -\sqrt{2}\,i$;

- L'équation $z^2 + z + 3 = 0$ ($\Delta = -11$) admet deux solutions:

$$z_3 = \frac{-1 - \sqrt{11}\,i}{2} \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{-1 + \sqrt{11}\,i}{2}.$$

Au total, l'équation $P(z) = 0$ admet 4 solutions:

$$z_1 = \sqrt{2}\,i,\ z_2 = -\sqrt{2}\,i,\ z_3 = \frac{-1 - \sqrt{11}\,i}{2} \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{-1 + \sqrt{11}\,i}{2}.$$