T^{LE} Technologique Mathématiques

Nombres Complexes Équations Polynomiales

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

ON S'AMUSE ! 2

CORRECTION

1. Donnons une solution entière de (E):

L'équation (E) est: $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$.

En tâtonnant, nous trouvons que $z = 1$ est une solution entière de (E).

Au total, une solution entière de (E) est: $z = 1 \in \mathbb{R}$.

2. Démontrons que, pour tout nombre complexe z, l'égalité (1) est vérifiée:

Soit (1), l'égalité: $z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)$.

$(z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1) = z^4 + z^3 + z^2 + z^3 + z^2 + z - 2z^2 - 2z - 2$

$= z^4 + 2z^3 - z - 2$.

Au total: l'égalité (1) est bien vérifiée.

3. Résolvons l'équation E dans l'ensemble des nombres complexes:

Pour répondre à cette question, nous allons résoudre 2 équations:

$$z^2 + z - 2 = 0 \quad \text{et} \quad z^2 + z + 1 = 0.$$

• Soit l'équation: $z^2 + z - 2 = 0$.

$\Delta = 9 > 0 \iff \Delta = (3)^2 > 0$.

D'où 2 solutions dans $\mathbb{C}$:

- $z_1 = \frac{-1-3}{2} \Rightarrow z_1 = -2,$

- $z_2 = \frac{-1+3}{2} \Rightarrow z_2 = 1.$

- Soit l'équation: $z^2 + z + 1 = 0.$

$\Delta = -3 < 0 \iff \Delta = (\sqrt{3}\, i)^2 < 0.$

D'où 2 solutions dans $\mathbb{C}$:

- $z_3 = \frac{-1-\sqrt{3}\, i}{2} \Rightarrow z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i,$

- $z_4 = \frac{-1+\sqrt{3}\, i}{2} \Rightarrow z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i.$

Au total, 4 solutions dans $\mathbb{C}$:

- $z_1 = -2$

- $z_2 = 1$

- $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$

- $z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i.$

4. Le quadrilatère ABCD est-il un losange ?

Soient les points: $A\,(1)$, $B\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right)$, $C\,(-2)$ et $D\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i\right).$

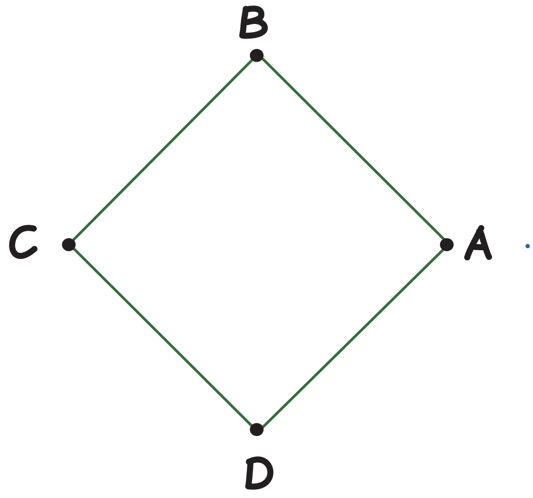
Le quadrilatère ABCD est un losange ssi:

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$,

- $(BD) \perp (CA)$

avec:



Or: • $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ssi $z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{DC}}$. (formule de cours)

Ici: $z_{\overrightarrow{AB}}\left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)$ et $z_{\overrightarrow{DC}} = \left(-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)$.

Donc: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

• $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ssi $z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{BC}}$. (formule de cours)

Ici: $z_{\overrightarrow{AD}}\left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)$ et $z_{\overrightarrow{BC}} = \left(-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)$.

Donc: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

• $(BD) \perp (CA)$ ssi $\dfrac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ est un imaginaire pur. (formule de cours)

Ici: $$\frac{z_A - z_C}{z_D - z_B} = \frac{1-(-2)}{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i\right)}$$

$$= \frac{3}{-\sqrt{3}\cdot i}$$

$$= \sqrt{3}\cdot i.$$

Donc: $\dfrac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ est un imaginaire pur.

Au total, comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $(BD) \perp (CA)$:

le quadrilatère ABCD est bien un losange.