T^{LE}

Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

Limites « d'une fonction f »

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

QUANTITÉ CONJUGUÉE 2

CORRECTION

1. Déterminons $\mathcal{D}f = I$:

Ici: $f(x) = \sqrt{x^2 + ax} - x$, avec $a \in \mathbb{N}^*$.

Il faut que: $x^2 + ax \geqslant 0$ cad $x(x+a) \geqslant 0$ ou encore $x \in]-\infty; -a] \cup [0; +\infty[$.

D'où l'ensemble de définition de la fonction f est: $I =]-\infty; -a] \cup [0; +\infty[$.

2. Calculons la limite de f en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + ax} - x$$

$$= (+\infty) - (+\infty).$$

Il s'agit d'une forme indéterminée.

Ayons recours à la technique de la quantité conjuguée pour contourner cette indétermination.

$$f(x) = \sqrt{x^2 + ax} - x \iff f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + ax} - x) \times (\sqrt{x^2 + ax} + x)}{(\sqrt{x^2 + ax} + x)}$$

$$\Longleftrightarrow\ f(x) = \frac{x^2 + ax - x^2}{\sqrt{x^2 + ax} + x}$$

$$\Longleftrightarrow\ f(x) = \frac{ax}{\sqrt{x^2\left(1 + \frac{a}{x}\right)} + x}.$$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ax}{|x| \times \sqrt{1 + \frac{a}{x}} + x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{ax}{x \times \sqrt{1 + \frac{a}{x}} + x} \quad (|x| = x \text{ car } x > 0)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{ax}{x + x} \quad \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{a}{x} = 0\right)$$

$$= \frac{a}{2}.$$

Ainsi: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{a}{2}.$