T^{LE}

Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

Limites « d'une fonction f »

CORRIGÉ DE L'EXERCICE

QUANTITÉ CONJUGUÉE 1

CORRECTION

1. Déterminons $\mathcal{D}f = I$:

Ici : $\boldsymbol{f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}}$.

Il faut que : $x^2 - x \geqslant 0$ **cad** $x(x-1) \geqslant 0$ **ou encore** $\boldsymbol{x \in \left]-\infty ; 0\right] \cup \left[1 ; +\infty\right[}$.

D'où l'ensemble de définition de la fonction f est : $\boldsymbol{I = \left]-\infty ; 0\right] \cup \left[1 ; +\infty\right[}$.

2. Calculons la limite de f en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2 - x}$$

$$= (+\infty) - (+\infty).$$

Il s'agit d'une forme indéterminée.

Ayons recours **à la technique de la quantité conjuguée** pour contourner cette **indétermination**.

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - x} \iff f(x) = \frac{(x - \sqrt{x^2 - x}) \times (\boldsymbol{x + \sqrt{x^2 - x}})}{(\boldsymbol{x + \sqrt{x^2 - x}})}$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(x) = \frac{x^2 - (x^2 - x)}{x + \sqrt{x^2 - x}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad f(x) = \frac{x}{x + \sqrt{x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)}}.$$

Dans ces conditions: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x + |x| \times \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x + x \times \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \quad (|x| = x \text{ car } x > 0)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x + x} \quad \left(\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = 0\right)$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Ainsi: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}.$