

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

**TLE**

# Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

**Intégrale, Synthèse**



**ÉNONCÉ DE L'EXERCICE**

# INTÉGRALES, SYNTHÈSE

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-à-dire sa concentration dans le plasma.

On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

## Partie A : administration par voie intraveineuse

On note  $f(t)$  la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre ( $\mu\text{g.L}^{-1}$ ), du médicament, au bout de  $t$  heures après administration par voie intraveineuse.

Le modèle mathématique est :  $f(t) = 20e^{-0,1t}$ , avec  $t \in [0 ; +\infty[$ .  
La concentration plasmatique initiale du médicament est donc  $f(0) = 20 \mu\text{g.L}^{-1}$ .

1) La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.

Déterminer cette demi-vie, notée  $t_{0,5}$ .

2) On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à  $0,2 \mu\text{g.L}^{-1}$ .

Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

3) En pharmacocinétique, on appelle ASC (ou « aire sous la courbe »), en  $\mu\text{g.L}^{-1}$ , le nombre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt.$$

Vérifier que pour ce modèle, l'ASC est égal à  $200 \mu\text{g.L}^{-1} \cdot \text{h}$ .

## Partie B : administration par voie orale

On note  $g(t)$  la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre ( $\mu\text{g.L}^{-1}$ ), au bout de  $t$  heures après ingestion par voie orale.

Le modèle mathématique est :  $g(t) = 20(e^{-0,1t} - e^{-t})$ , avec  $t \in [0 ; +\infty[$ .

Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à :  $g(0) = 0 \mu\text{g.L}^{-1}$ .

1) Démontrer que, pour tout  $t$  de l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ , on a :

$$g'(t) = 20e^{-t} (1 - 0,1e^{0,9t}).$$

2) Étudier les variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ . (On ne demande pas la limite en  $+\infty$ .)

En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale.

On donnera le résultat à la minute près.

## Partie C : administration répétée par voie intraveineuse

On décide d'injecter à intervalles de temps réguliers la même dose de médicament par voie intraveineuse. L'intervalle de temps (en heure) entre deux injections est choisi égal à la demi-vie du médicament, c'est-à-dire au nombre  $t_{0,5}$  qui a été calculé en A - 1.

Chaque nouvelle injection entraîne une hausse de la concentration plasmatique de  $20 \mu\text{g.L}^{-1}$ .

On note  $u_n$  la concentration plasmatique du médicament immédiatement après la  $n$ -ième injection.

Ainsi,  $u_1 = 20$  et, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 1, on a :  $u_{n+1} = 0,5u_n + 20$ .

On remarque qu'avec ce modèle, la concentration initiale du médicament après la première injection, soit  $20\mu\text{g.L}^{-1}$ , est analogue à celle donnée par le modèle de la partie A, soit  $f(0)$ .

- 1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 1$  :  $u_n = 40 - 40 \times 0,5^n$ .
- 2) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .
- 3) On considère que l'équilibre est atteint dès que la concentration plasmatique dépasse  $38 \mu\text{g.L}^{-1}$ .  
Déterminer le nombre minimal d'injections nécessaires pour atteindre cet équilibre.