T^LE

Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

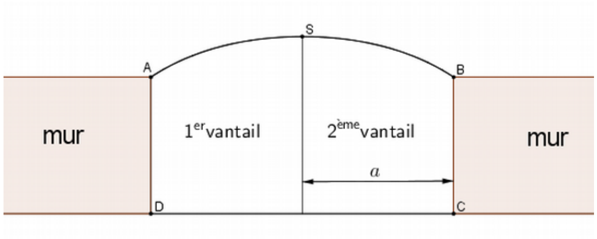
Intégrale, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALES, SYNTHÈSE

Un fabricant doit réaliser un portail en bois plein sur mesure pour un particulier. L'ouverture du mur d'enceinte (non encore construit) ne peut excéder 4 mètres de large. Le portail est constitué de deux vantaux de largeur a telle que $0 < a \leqslant 2$.

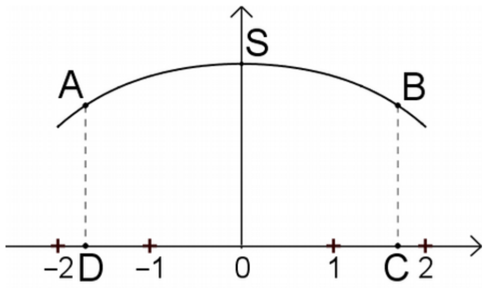
Dans le modèle choisi, le portail fermé a la forme illustrée par la figure ci-contre. Les côtés $[AD]$ et $[BC]$ sont perpendiculaires au seuil $[CD]$ du portail. Entre les points A et B, le haut des vantaux a la forme d'une portion de courbe.



Cette portion de courbe est une partie de la représentation graphique de la fonction f définie sur $[-2\,;\,2]$ par :

$$f(x) = -\frac{b}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} + e^{-\frac{x}{b}}\right) + \frac{9}{4} \quad \text{où } b > 0.$$

Le repère est choisi de façon que les points A, B, C et D aient pour coordonnées respectives $\left(-a\,;\,f(-a)\right)$, $\left(a\,;\,f(a)\right)$, $(a\,;\,0)$ et $(-a\,;\,0)$ et on note S le sommet de la courbe de f, comme illustré ci-contre.



Partie A

1. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[-2\,;\,2]$, $f(-x) = f(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de la fonction f ?
2. On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;\,2]$:
$$f'(x) = -\frac{1}{8}\left(e^{\frac{x}{b}} - e^{-\frac{x}{b}}\right).$$
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;\,2]$ et en déduire les coordonnées du point S en fonction de b.

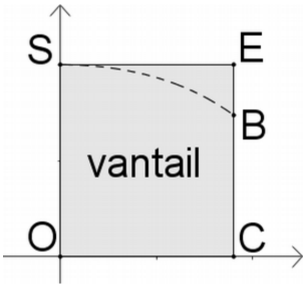
Partie B

La hauteur du mur est de 1,5 m. On souhaite que le point S soit à 2 m du sol. On cherche alors les valeurs de a et b.

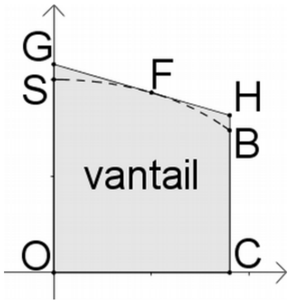
1. Justifier que $b = 1$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0\,;2]$ et en déduire une valeur approchée de a au centième.
3. Dans cette question, on choisit $a = 1,8$ et $b = 1$. Le client décide d'automatiser son portail si la masse d'un vantail excède 60 kg. La densité des planches de bois utilisées pour la fabrication des vantaux est égale à 20 kg.m^{-2}. Que décide le client ?

Partie C

On conserve les valeurs $a = 1,8$ et $b = 1$.
Pour découper les vantaux, le fabricant prédécoupe des planches. Il a le choix entre deux formes de planches prédécoupées : soit un rectangle $OCES$, soit un trapèze $OCHG$ comme dans les schémas ci-dessous. Dans la deuxième méthode, la droite (GH) est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point F d'abscisse 1.



Forme 1 : découpe dans un rectangle



Forme 2 : découpe dans un trapèze

La forme 1 est la plus simple, mais visuellement la forme 2 semble plus économique.
Évaluer l'économie réalisée en termes de surface de bois en choisissant la forme 2 plutôt que la forme 1.

On rappelle la formule donnant l'aire d'un trapèze. En notant b et B respectivement les longueurs de la petite base et de la grande base du trapèze (côtés parallèles) et h la hauteur du trapèze :

$$Aire = \frac{b+B}{2} \times h.$$