

www.freemaths.fr

TLE

Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

Intégrale, Synthèse



CORRIGÉ DE L'EXERCICE

CORRECTION

Partie A: Étude Graphique

1. Résolvons graphiquement $f(x) > 0$:

Graphiquement, $f(x) > 0$ à partir du moment où: $x > 0,5$.

Au total: $f(x) > 0$ ssi $x \in]0,5;6]$.

2. Donnons la valeur approchée du maximum de f sur l'intervalle $[0;6]$:

Graphiquement, le maximum de f est atteint quand $x = 1,5$.

Quand $x = 1,5$, $f(x) \in [2;2,5]$.

Au total, une valeur approchée du maximum de f sur $[0;6]$ est: $y_{\max} \approx 2,25$.

3. Déterminons, en justifiant, le signe de f' sur $[2;6]$:

Graphiquement, la courbe représentative de f décroît sur $[2;6]$.

D'où, f est décroissante sur $[2;6]$ et ainsi nous pouvons affirmer que:

pour tout $x \in [2;6]$, $f'(x) < 0$.

Au total: pour tout $x \in [2;6]$, $f'(x) < 0$.

4. Déterminons pour quelle raison on peut penser que la courbe admet un point d'inflexion:

Rappelons qu'en un point d'inflexion, la dérivée seconde s'annule et change de signe.

Graphiquement, sur $[0;2]$, la courbe est située sous ses tangentes et, sur $[3,5;6]$, elle est située au dessus de ses tangentes.

Il semble donc que sur l'intervalle $[0;6]$, et plus exactement sur $[2;6]$, la fonction va passer de concave à convexe.

D'où, f'' va s'annuler et changer de signe et ainsi nous pouvons affirmer que:

f admet un point d'inflexion sur l'intervalle $[2;6]$.

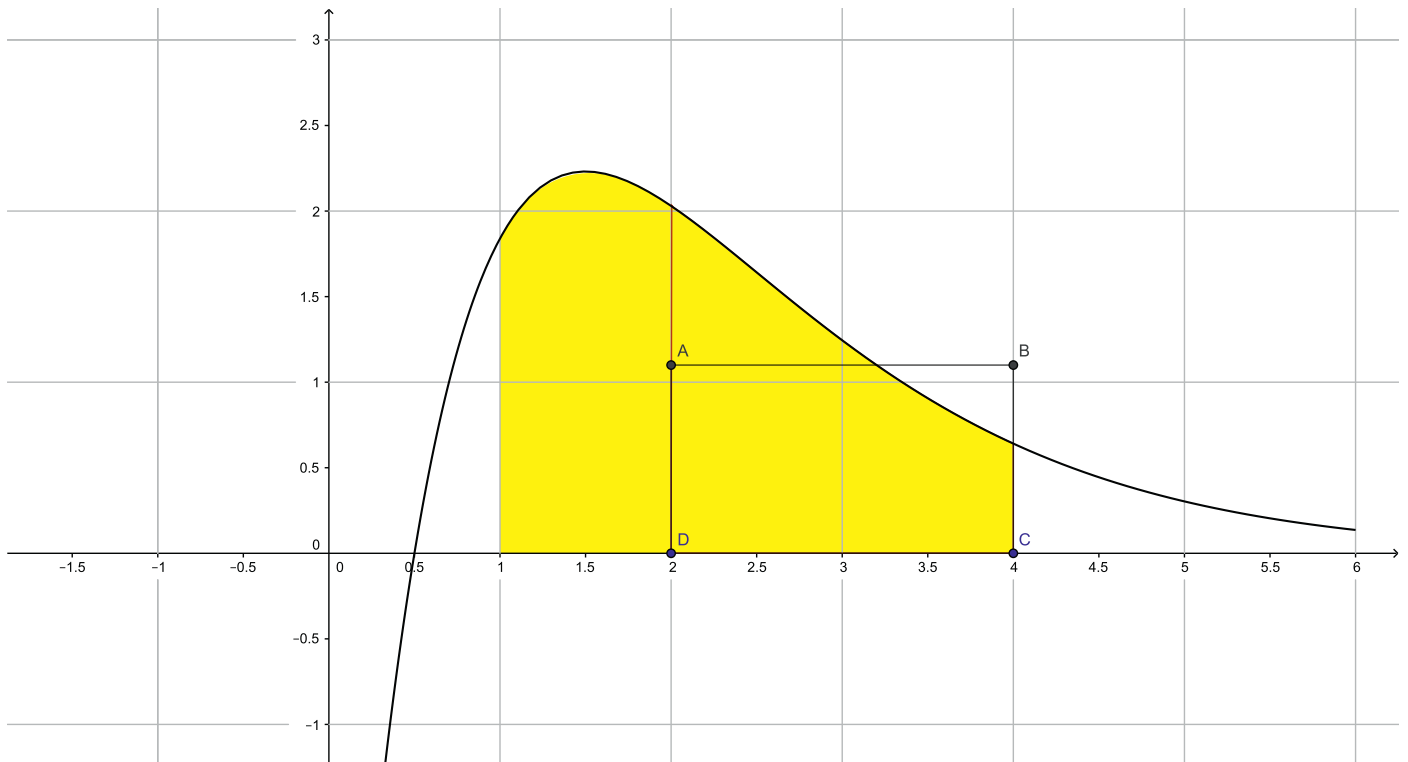
Au total: f admet donc un point d'inflexion.

5. Donnons un encadrement par 2 entiers consécutifs de $\mathcal{A} = \int_1^4 f(x)dx$:

Soit \mathcal{A} l'aire correspondante à: $\int_1^4 f(x)dx$.

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire \mathcal{A} du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$, est telle que: $4 < \mathcal{A} < 5$.

Nous pouvons représenter cette aire \mathcal{A} , en jaune, sur le graphique suivant:



Au total, l'aire demandée \mathcal{A} est telle que: $4 < \mathcal{A} < 5$.

Partie B: Étude Analytique

1. Dressons le tableau de variation:

Étape 1: $f'(x) = (-10x + 15)e^{-x}$, sur $[0; 6]$.

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout x de $[0; 6]$, sachant que: $e^{-x} > 0$.

• **1^{er} cas:** $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \quad \text{ssi} \quad (-10x + 15)e^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow -10x + 15 = 0, \quad \text{cad:} \quad x = \frac{3}{2}.$$

• **2^{eme} cas:** $f'(x) < 0$.

$$f'(x) < 0 \quad \text{ssi} \quad (-10x + 15)e^{-x} < 0$$

$$\Leftrightarrow -10x + 15 < 0, \quad \text{cad:} \quad x > \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x \in]\frac{3}{2}; 6].$$

• 3^{eme} cas: $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \text{ ssi } (-10x + 15)e^{-x} > 0$$

$$\Leftrightarrow -10x + 15 > 0, \text{ cad: } x < \frac{3}{2} \text{ ou } x \in [0; \frac{3}{2}[.$$

Au total: • f est croissante sur $[0; \frac{3}{2}]$,

(car sur $[0; \frac{3}{2}]$, $f'(x) \geq 0$)

• f est décroissante sur $[\frac{3}{2}; 6]$.

(car sur $[\frac{3}{2}; 6]$, $f'(x) \leq 0$)

Étape 2: Le tableau de variation.

Nous pouvons dresser le tableau de variation suivant:

x	0	$\frac{3}{2}$	6
f'	+	0	-
f	a	b	c

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = -5$,

• $b = f\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow b = 10e^{-3/2} > 0$,

• $c = f(6) \Rightarrow c = 55e^{-6} > 0$.

Étape 3: La valeur de l'extremum.

Soit $E(x_E; y_E)$, l'extremum de f sur $[0; 6]$.

x_E est tel que: $f'(x_E) = 0$.

$$f'(x_E) = 0 \Rightarrow x_E = \frac{3}{2} \text{ et donc } y_E = 10e^{-3/2}.$$

Au total: le point $E\left(\frac{3}{2}; 10e^{-3/2}\right)$ est l'extremum de f sur $[0;6]$.

2. Étudions la convexité de f sur $[0;6]$:

Ici: • $f'(x) = (-10x + 15)e^{-x}$

• $f''(x) = (10x - 25)e^{-x}$.

Or: • f est convexe sur $[0;6]$ ssi: pour tout $x \in [0;6]$, $f''(x) \geq 0$.

• f est concave sur $[0;6]$ ssi: pour tout $x \in [0;6]$, $f''(x) \leq 0$.

Nous allons distinguer 2 cas pour tout $x \in [0;6]$, sachant que: $e^{-x} > 0$.

• **1^{er} cas:** $f''(x) \geq 0$.

$$f''(x) \geq 0 \text{ ssi } (10x - 25)e^{-x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 10x - 25 \geq 0, \text{ cad: } x \geq \frac{5}{2} \text{ ou } x \in \left[\frac{5}{2}; 6\right].$$

• **2^{eme} cas:** $f''(x) \leq 0$.

$$f''(x) \leq 0 \text{ ssi } (10x - 25)e^{-x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 10x - 25 \leq 0, \text{ cad: } x \leq \frac{5}{2} \text{ ou } x \in \left[0; \frac{5}{2}\right].$$

Au total: • f est concave sur $\left[0; \frac{5}{2}\right]$,

• f est convexe sur $\left[\frac{5}{2}; 6\right]$.

3. Montrons que F est une primitive de f sur $[0;6]$:

$$F(x) = (-10x - 5)e^{-x}.$$

Ici: f est continue sur $[0;6]$. Elle admet donc une primitive F dérivable sur

l'intervalle $[0;6]$ et F est telle que: $F' = f$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in [0;6], \quad F'(x) &= -10e^{-x} - (-10x - 5)e^{-x} \\ &\Rightarrow F'(x) = (10x - 5)e^{-x}. \end{aligned}$$

Au total, on a bien pour tout $x \in [0;6]$: F est une primitive de f car $F' = f$.

4. Déduisons-en la valeur exacte puis une valeur approchée au centième de $I = \int_2^4 f(x)dx$:

$$\text{Ici, il s'agit de calculer: } I = \int_2^4 f(x)dx.$$

f est continue sur $[0;6]$, elle admet donc des primitives sur $[0;6]$ et par conséquent: I existe.

$$\begin{aligned} I &= \int_2^4 (10x - 5)e^{-x} dx \\ &= [(-10x - 5)e^{-x}]_2^4 \\ &\Rightarrow I = 25e^{-2} - 45e^{-4}. \end{aligned}$$

En arrondissant au centième, nous obtenons: $I \approx 2,56$.

Au total, l'aire exacte demandée est: $I = 25e^{-2} - 45e^{-4}$ ou $I \approx 2,56$.

5. Déterminons, à 0,01 près, la hauteur AD de ce rectangle:

La hauteur AD de ce rectangle correspond à la valeur moyenne de la fonction f sur $[2;4]$.

Soit " m ", la valeur moyenne de f sur $[2;4]$.

$$m \text{ est telle que: } m = \frac{1}{4-2} \int_2^4 f(x) dx.$$

$$m = \frac{1}{4-2} \int_2^4 f(x) dx \Leftrightarrow m = \frac{1}{2} \times 1$$

$$\Rightarrow m \approx 1,28.$$

Au total, à 0,01 près, la hauteur AD de ce rectangle est: $m \approx 1,28$.