T$^{\text{LE}}$ Technologique Mathématiques

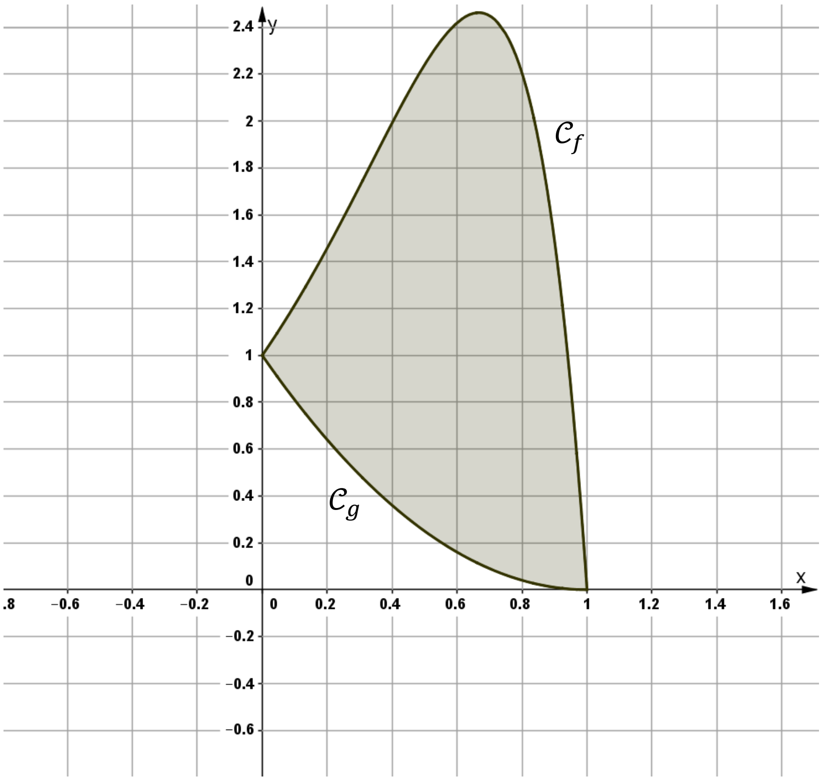
(STI2D & STL)

Intégrale, Synthèse

ÉNONCÉ DE L'EXERCICE

INTÉGRALES, SYNTHÈSE

Une entreprise souhaite utiliser un motif décoratif pour sa communication.
Pour réaliser ce motif, on modélise sa forme à l'aide de deux fonctions f et g définies par :
pour tout réel x de $[0\,;1]$, $f(x) = (1-x)\mathrm{e}^{3x}$ et $g(x) = x^2 - 2x + 1$.
Leurs courbes représentatives seront notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



Partie A

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants.

```
dériver((1-x)*exp(3x))
              : -3x*exp(3*x)+2*exp(3*x)

factoriser(-3x*exp(3*x)+2*exp(3*x))
              : exp(3x)*(-3x+2)

factoriser(dériver(exp(3x)*(-3x+2)))
              : 3*exp(3*x)(1-3x)
```

Lecture : la dérivée de la fonction f est donnée par $f'(x) = -3x\mathrm{e}^{3x} + 2\mathrm{e}^{3x}$, ce qui, après factorisation, donne $f'(x) = (-3x+2)\mathrm{e}^{3x}$.

1. Étudier sur $[0\,;1]$ le signe de la fonction dérivée f', puis donner le tableau de variation de f sur $[0\,;1]$ en précisant les valeurs utiles.

2. La courbe $\mathcal{C}_f$ possède un point d'inflexion. Déterminer ses coordonnées.

Partie B

On se propose de calculer l'aire de la partie grisée sur le graphique.

1. Vérifier que les points A et B de coordonnées respectives (1 ; 0) et (0 ; 1) sont des points communs aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2. On admet que : pour tout x dans $[0\,;1]$, $f(x) - g(x) = (1 - x)(\mathrm{e}^{3x} - 1 + x)$.

a. Justifier que pour tout x dans $[0\,;1]$, $\mathrm{e}^{3x} - 1 \geq 0$.

b. En déduire que pour tout x dans $[0\,;1]$, $\mathrm{e}^{3x} - 1 + x \geq 0$.

c. Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ pour tout x dans $[0\,;1]$.

3. **a.** Calculer $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

b. On admet que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3 - 4}{9}.$$

Calculer l'aire S, en unité d'aire, de la partie grisée. Arrondir le résultat au dixième.