

[www.freemaths.fr](http://www.freemaths.fr)

**TLE**

# Technologique Mathématiques

(STI2D & STL)

**Intégrale, Synthèse**



**CORRIGÉ DE L'EXERCICE**

## CORRECTION

### Partie A:

1. Montrons que, pour tout  $x \in [0; 4]$ ,  $f'(x) = (-2, 16x + 2, 16) e^{-0,6x}$ :

Ici: •  $f(x) = (3, 6x + 2, 4) e^{-0,6x} - 1, 4$        $(u \times v) - 1, 4$

•  $Df = [0; 4]$ .

Posons:  $f = f_1 \times f_2 + f_3$ , avec:  $f_1(x) = 3, 6x + 2, 4$ ,  $f_2(x) = e^{-0,6x}$

et  $f_3(x) = -1, 4$ .

$f$  est dérivable sur  $[0; 4]$  car  $f_1, f_2$  et  $f_3$  sont dérivables sur  $[0; 4]$ .

Ainsi, nous pouvons calculer  $f'$  pour tout  $x \in [0; 4]$ .

Pour tout  $x \in [0; 4]$ :

$$f'(x) = (3, 6) \times (e^{-0,6x}) + (3, 6x + 2, 4) \times (-0,6 e^{-0,6x}) \quad (u' \times v + u \times v')$$

$$= 3, 6 e^{-0,6x} - 2, 16x e^{-0,6x} - 1, 44 e^{-0,6x}$$

$$= (-2, 16x + 2, 16) e^{-0,6x}.$$

Au total, pour tout  $x \in [0; 4]$ , nous avons bien:  $f'(x) = (-2, 16x + 2, 16) e^{-0,6x}$ .

2. a. Etudions le signe de  $f'(x)$  sur  $[0; 4]$ :

Nous allons distinguer 3 cas pour tout  $x \in [0; 4]$ :

• 1<sup>er</sup> cas:  $f'(x) = 0$ .

$f'(x) = 0$  ssi  $-2,16x + 2,16 = 0$ , cad:  $x = 1$ .

(pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-0,6x} > 0$ )

• 2<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) < 0$ .

$f'(x) < 0$  ssi  $-2,16x + 2,16 < 0$ , cad:  $x \in ]1; 4]$ .

(pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-0,6x} > 0$ )

• 3<sup>ème</sup> cas:  $f'(x) > 0$ .

$f'(x) > 0$  ssi  $-2,16x + 2,16 > 0$ , cad:  $x \in [0; 1[$ .

(pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $e^{-0,6x} > 0$ )

**Au total:** •  $f$  est croissante sur  $[0; 1]$ ,

(car sur  $[0; 1]$ ,  $f'(x) \geq 0$ )

•  $f$  est décroissante sur  $[1; 4]$ .

(car sur  $[1; 4]$ ,  $f'(x) \leq 0$ )

2. b. Dressons le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; 4]$ :

Sur  $[0; 4]$ , le tableau de variations de  $f$  est le suivant:

	0	1	4
	+	0	-
	a	b	c

Avec: •  $a = f(0) \Rightarrow a = 1,$

•  $b = f(1) \Rightarrow b = 6e^{-0,6} - 1,4 \approx 1,89,$

•  $c = f(4) \Rightarrow c = 16,8e^{-2,4} - 1,4 \approx 0,12.$

3. a. Calculons la valeur exacte de  $\int_0^4 f(x) dx$ :

Ici, il s'agit de calculer:  $I = \int_0^4 f(x) dx.$

$f$  est continue sur  $[0; 4]$ , elle admet donc des primitives sur  $[0; 4]$  et par conséquent:  $I$  existe.

$$I = \int_0^4 f(x) dx$$

$$= [F(x)]_0^4$$

$$= [(-6x - 14)e^{-0,6x} - 1,4x]_0^4$$

$$= 8,4 - 38e^{-2,4}.$$

Au total, une valeur exacte de  $I$  est:  $I = 8,4 - 38e^{-2,4}.$

3. b. Déterminons une valeur approchée de  $I$ :

Une valeur approchée de  $I$  est:  $I \approx 4,95.$

## Partie B:

1. Montrons que  $\int_0^{0,5} g(x) dx = \frac{1}{6}$ :

Ici, il s'agit de calculer:  $J = \int_0^{0,5} g(x) dx.$

$g$  est continue sur  $[0; 0,5]$ , elle admet donc des primitives sur  $[0; 0,5]$  et par conséquent:  $J$  existe.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{0,5} g(x) dx \\ &= \int_0^{0,5} (4x^2 - 4x + 1) dx \\ &= \left[ \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x \right]_0^{0,5} \\ &= \frac{4}{3} (0,5)^3 - 2 (0,5)^2 + 0,5 \\ &= \frac{4}{3} \times \left( \frac{1}{8} \right) - 2 \times \left( \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Au total, nous avons bien:  $J = \frac{1}{6}$ .

2. Calculons une valeur approchée de l'aire, en unités d'aire, de ce domaine:

L'aire demandée  $\mathcal{A}$  est égale à deux fois l'aire du domaine colorié située au dessus de l'axe des abscisses.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } \mathcal{A} &= 2 \times \left( \int_0^4 f(x) dx - \int_0^{0,5} g(x) dx \right) \\ &= 2 \times (I - J). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où: } \mathcal{A} &\approx 2 \times \left( 4,95 - \frac{1}{6} \right) \\ &\approx 9,57. \end{aligned}$$

Au total, une valeur approchée de l'aire du domaine colorié est:

$$\mathcal{A} \approx 9,57 \text{ unités d'aire.}$$